Este arquivo contém alguns dos exercícios que foram resolvidos ou discutidos durante as aulas. Seus enunciados podem não estar completos e pode ser que durante as aulas importantes comentários sobre as resoluções tenham sido feitos.[1]

# Conteúdo



## E1 Números reais

1. Encontre o sup e inf em $\mathbb{Q}$ de:
   (a) $A_1 = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$;
   (b) $A_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \ e \ q^2 < 2\}$;
   (c) $A_3 = \{q \in \mathbb{Q} : q < 2\}$.

[1]Caso você encontre algum erro neste arquivo, por favor, reportá-lo para apperon@icmc.usp.br

Resp.: $\nexists \sup A_1, \inf A_1$; $\sup A_2 = 0, \nexists \inf A_2\ (-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$; $\sup A_3 = 2, \nexists \inf A_3$

2. Encontre o sup e inf em $\mathbb{R}$ de:

   (a) $A_1 = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$;

   (b) $A_2 = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\ e\ q^2 < 2\}$;

   (c) $A_3 = \{q \in \mathbb{Q} : q < 2\}$.

   Resp.: $\sup A_1 = \sqrt{2}, \inf A_1 = -\sqrt{2}$; $\sup A_2 = 0, \inf A_2 = -\sqrt{2}$; $\sup A_3 = 2, \nexists \inf A_3$

3. Determine o $\sup A$ e o $\inf A$ em $\mathbb{R}$, caso existam.

   (a) $A = [1, 9]$

   (b) $A = (-2, 1)$

   (c) $A = (-\infty, 0)$

   (d) $A = \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

   Resp.: (a) $\sup A = 9$, $\inf A = 1$; (b) $\sup A = 1$, $\inf A = -2$; (c) $\sup A = 0$, $\nexists \inf A$; (d) $\sup A = 1$, $\inf A = 0$.

4. Resolva em $\mathbb{R}$:

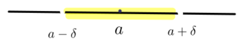
   (a) $\dfrac{6x-1}{3-x} \geq 2$

   (b) $|5-x| < 3$

   Resp.: (b) $\{x \in \mathbb{R};\ \frac{7}{8} \leq x < 3\}$; (b) $\{x \in \mathbb{R};\ 2 < x < 8\}$

5. Sejam $\delta > 0$ e $a \in \mathbb{R}$. Elimine o módulo de $|x-a| < \delta$ e represente geometricamente.

   Resp.: $\{x \in \mathbb{R} : a-\delta < x < a+\delta\} = (a-\delta, a+\delta)$




6. Resolva em $\mathbb{R}$:

   (a) $x^2 \geq 9$

   (b) $\dfrac{x^2-1}{x-2} < 0$

   (c) $|x^3 - 2x + 1| < 0$

   Resp.: (a) $\{x \in \mathbb{R}; x \geq 3 \ ou \ x \leq -3\} = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$;
   (b) $\{x \in \mathbb{R}; x < -1 \ ou \ 1 < x < 2\} = (-\infty, -1) \cup (1, 2)$; (c) $\emptyset$

## E2 Funções

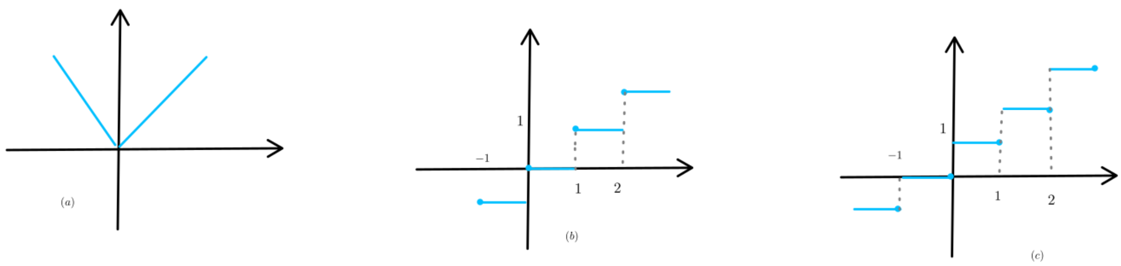
7. Encontre domínio, imagem e faça esboço do gráfico da função $f$ dada por:

   (a) $f(x) = |x|$

   (b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ("chão": maior inteiro menor ou igual a $x$)

   (c) (tarefa!) $f(x) = \lceil x \rceil$ ("teto": menor inteiro maior ou igual a $x$)

   Resp.: (a) $D_f = \mathbb{R}$, $Im(f) = [0, \infty)$; (b,c) $D_f = \mathbb{R}$, $Im(f) = \mathbb{Z}$

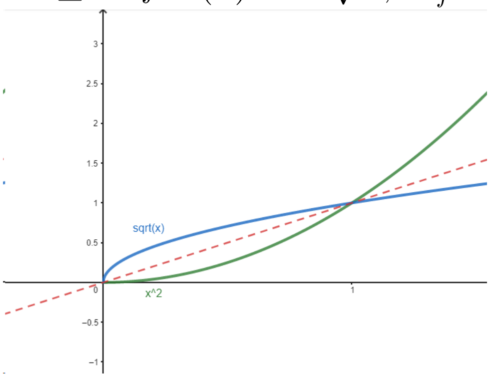


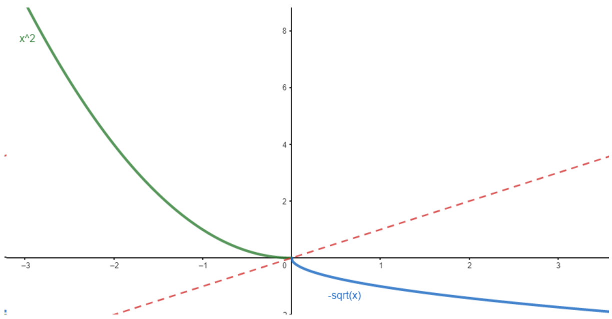
8. Dadas $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 1$, estude $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$ e $g \circ f$.
Resp.: $D_{f \circ f} = [0, \infty)$ e $(f \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$;
$D_{g \circ g} = \mathbb{R}$ e $(g \circ g)(x) = (x^2 - 1)^2 - 1$;
Para definir a função $f \circ g$ é necessário restringir o domínio de $g$ de modo que a condição $Im(g) \subset D_f$ fique satisfeita. Uma solução possível é:
$D_{f \circ g} = [1, \infty)$ e $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;
Outra solução, a qual considera o "maior"domínio restrito de $g$ possível é:
$D_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ e $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;
$D_{g \circ f} = [0, \infty)$ e $(g \circ f)(x) = \sqrt{x - 1}$.

9. Restrinja o domínio/contradomínio, se necessário, da função dada de modo que $f$ seja invertível e encontre sua inversa. Faça esboço dos gráficos.

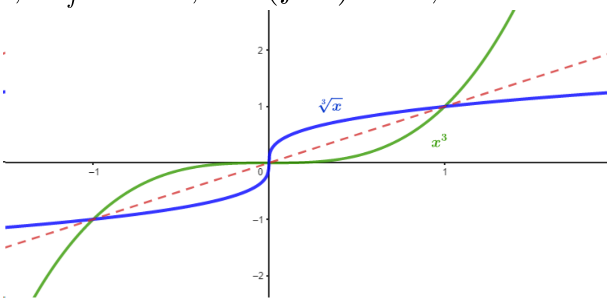
   (a) $f(x) = x^2$
   (b) $f(x) = x^3$

   Resp.: (a)
   para $x \geq 0$: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $D_{f^{-1}} = [0, \infty)$, $Im(f^{-1}) = [0, \infty)$;
   para $x \leq 0$: $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, $D_{f^{-1}} = [0, \infty)$, $Im(f^{-1}) = (-\infty, 0]$;




   (b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, $Im(f^{-1}) = \mathbb{R}$;



10. Verifique se as funções dadas são limitadas em $D$. Determine os pontos/valores de máximo e mínimo de $f$.

    (a) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}, \quad D = D_f$

    (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad D = D_f$

    (c) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad D = [-\infty, -5] \cup [5, \infty]$

    (d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + a}$, $a \geq 1, \quad D = D_f$

    Resp.:
    (a) sim: $|f(x)| \leq 1, \forall x \in D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
    (b) não: $\forall L > 0, \exists x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, 0 < x_1 < \frac{1}{L}; f(x_1) > L$ e
    $\forall M < 0, \exists x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \frac{1}{M} < x_2 < 0; f(x_2) < M$;
    (c) sim: $|f(x)| \leq \frac{1}{5}, \forall x \in D = \mathbb{R}$;
    (d) sim: $|f(x)| \leq 1, \forall x \in D = \mathbb{R}$.

11. Estude crescimento/decrescimento da função:

    (a) $f(x) = x^2$

    (b) $f(x) = x^3$ (tarefa!)

    Resp.: (a) crescente em $[0, \infty)$; decrescente em $(-\infty, 0]$; (b) crescente em $\mathbb{R}$

12. Estude a paridade da função:

    (a) $f(x) = x^2$

    (b) $f(x) = x^3$

    (c) $f(x) = x^2 - 2x$

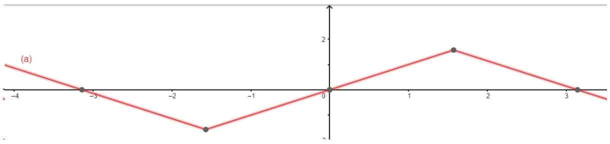
    Resp.: (a) par; (b) ímpar; (c) nem par nem ímpar

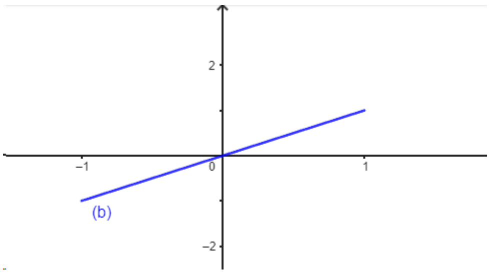
13. Esboce o gráfico das funções:

    (a) $f(x) = \arcsin(\sin(x))$

    (b) $f(x) = \sin(\arcsin(x))$

Resp.: (a) $D_f = \mathbb{R}$; (b) $D_f = [-1, 1]$




14. Usando translações, esboce o gráfico das funções:

(a) $f(x) = |x - 2| + 5$

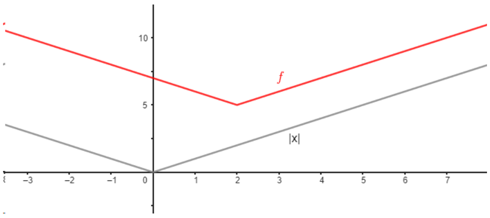
(b) $f(x) = 1 - \sqrt{x+3}$

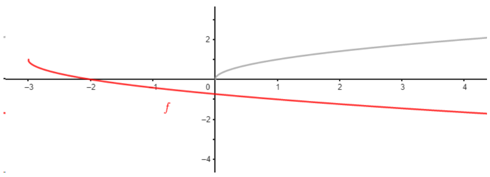
(c) $f(x) = x^3 + 2$

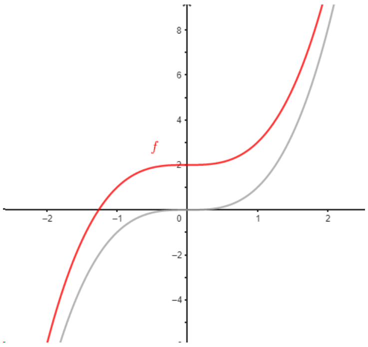
(d) $f(x) = (x-2)^3$

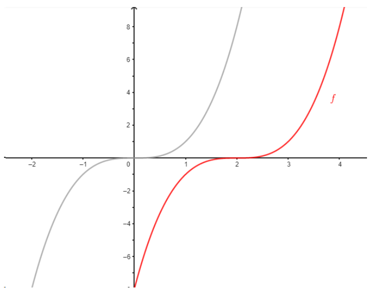
(e) $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + 1$

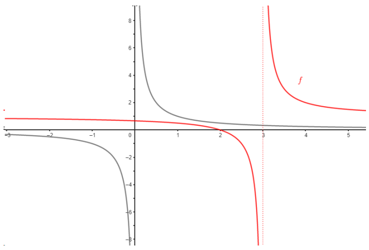
Resp.: (a, c, d) $D_f = \mathbb{R}$; (b) $D_f = [-3, \infty)$; (e) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$




## E3 Limites e Continuidade

15. Determine o conjunto $A'$ dos pontos de acumulação de $A$:

(a) $A = (1, 5]$

(b) $A = (-\infty, 2) \cup (2, 3)$

(c) $A = (-\infty, 0) \cup \{1\}$

(d) $A = \mathbb{R}$

Resp.: (a) $A' = [1, 5]$; (a) $A' = (-\infty, 3]$; (c) $A' = (-\infty, 0]$; (d) $A' = \mathbb{R}$

16. Verifique que para qualquer $p \in \mathbb{R}$, vale:
    (a) $\lim_{x\to p} k = k$, onde $k \in \mathbb{R}$
    (b) $\lim_{x\to p} x = p$
17. Determine os pontos em que $f$ é contínua.
    (a) $f(x) = k$, onde $k \in \mathbb{R}$
    (b) $f(x) = x$
    (c) $f(x) = |x|$

    Resp.: (a, b) e (c) contínuas em $\mathbb{R}$
18. Calcule:
    (a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} (5x - 4)$
    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

    Resp.: (a) $-9$; (b) $\frac{5}{4}$
19. Determine se $f$ é contínua no ponto $p$ dado:
    (a) $f(x) = x^2 + 2x - 4, \quad p = 3$
    (b) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \neq -1 \\ 5, & x = -1 \end{cases}, \qquad p = -1$

    Resp.: (a) contínua em $p$ ($\mathbb{R}$); (b) não é contínua em $p$
20. Calcule:
    (a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} e^{-x^2}$
    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 6}{x - 4}$
    (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(x^2 + 1)$
    (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x}$
    (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^3 + 4} - 2}{x^3}$
    (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$

    Resp.: (20a) $e^{-4}$; (20b) $\frac{5}{3}$; (20c) 0; (20d) $-2$; (20e) $\frac{1}{4}$; (20f) $\frac{1}{4}$

21. Determine os pontos onde $f$ é contínua:

    (a) $f(x) = \dfrac{\ln(4-x) + e^{1/x}}{\sqrt{x-1} + 2x}$

    (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

    Resp.: (a) $f$ é contínua em $(1, 4]$; (b) $f$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

## E3.1 Limites laterais

22. Calcule:

    (a) $\lim\limits_{x\to 0} |x|$

    (b) $\lim\limits_{x\to p} |x|$, $p \neq 0$

    (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$

    (d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$

    (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$

    (f) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{|5-x|}{5-x}$

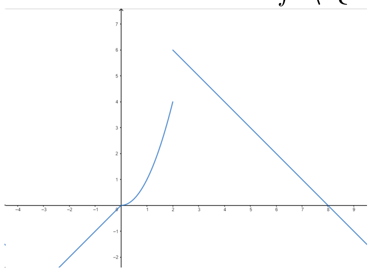
    (g) $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{|5-x|}{5-x}$

    (h) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{|5-x|}{5-x}$

    Resp.: (a) 0; (b) $|p|$; (c) 1; (d) $-1$; (e) $\nexists$; (f) $-1$; (g) 1; (h) $\nexists$

23. Determine os pontos de continuidade de $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 2 \\ 8 - x, & x > 2. \end{cases}$

    Faça um esboço do gráfico de $f$.
    Resp.: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f$ é contínua em $D_f \setminus \{2\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$



### E3.2 Teoremas do Confronto e Anulamento

24. (Tarefa!) Verifique que

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to p} |f(x)| = 0.$$

25. Calcule:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}$ (Tarefa!)

Resp.: (a, b) 0

## E4 Limites infinitos e no infinito

26. (a) Verifique, usando a definição, que (tarefa!)

i. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

ii. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$

iii. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0,\ \ r\in\mathbb{Q},\ r>0$

iv. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty,\ \ r\in\mathbb{Q},\ r>0$

Resp.: (i) $\delta = e^{-M}$; (ii) $H = \ln(M)$ $(M>0)$; (iii) $H = \frac{1}{\varepsilon^r}$; (i) $\delta = \frac{1}{M^r}$

(b) Use o item anterior para verificar que

i. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty.$

ii. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$

27. Calcule, caso existam, os limites abaixo. O que podemos dizer sobre assíntotas verticais dos gráficos das funções em cada item?

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 5^-} \frac{6}{5-x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2(x+2)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x-1}{x^2(x+2)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-3}{x^3+x^2}$

Resp.: (a) $+\infty$ e $x = 5$ é AV; (b) $-\infty$ e $x = 0$ é AV; (c) $\nexists$ e $x = -2$ é AV; (d) $-\infty$ e $x = 0$ é AV

28. Calcule, caso existam, os limites abaixo. O que podemos dizer sobre assíntotas horizontais dos gráficos das funções em cada item?

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} x$

(b) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} (x^2 + 3x)$

(c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\to+\infty}} (x^3 + 5x)$

(d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} \frac{6}{5 - x}$

(e) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\to+\infty}} \frac{2x^2 - 5x + 9}{x^2 - 2}$

(f) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} \frac{\sqrt{9x^2 - 1}}{6x - 3}$

(g) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\to+\infty}} \frac{2x - 1}{\sqrt{4x^2 - x}}$

(h) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

Resp.: (a) $+\infty$ ($-\infty$) e $\nexists$ AH; (b) $+\infty$ ($+\infty$) e $\nexists$ AH; (c) $-\infty$ ($+\infty$) e $\nexists$ AH; (d) 0 (0) e $y = 0$ é AH; (e) 2 (2) e $y = 2$ é AH; (f) $\frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2}$) e $y = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{1}{2}$ são AH; (g) $-1$ (1) e $y = -1$ e $y = 1$ são AH; (h) 0 (0) e $y = 0$ é AH;

29. (Tarefa!) Encontre o erro no seguinte cálculo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 2} - x &= \lim_{x\to-\infty} x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} - x \\
&= \lim_{x\to-\infty} x\sqrt[3]{1 - 0 + 0} - x \\
&= \lim_{x\to-\infty} x - x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Encontre o valor correto do limite acima!
Resp.: $-\frac{1}{3}$

### E4.1 Primeiro limite fundamental

30. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sin x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\sin 4x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{x-1}$

Resp.: (a) 5; (b) 0; (c) $\frac{3}{4}$; (d) 0; (e) 1; (f) $-\pi$

### E4.2 Segundo limite fundamental

31. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{1/2x}$ (tarefa!)

Resp.: (a) $e^2$; (b) $\sqrt{e}$

## E5 Derivada

32. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : x \mapsto x^2$ no ponto $(2,4)$.
Resp.: $y = 4x - 4$

33. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 1, & x < 1. \end{cases}$

Calcule, se existir, $f'(1)$ .
Resp.: $\nexists f'(1)$

34. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 2, & x < 1. \end{cases}$

    Calcule, se existir, $f'(1)$ .
    Resp.: $\nexists f'(1)$

35. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 1 \\ x^2+2, & x < 1. \end{cases}$

    Calcule, se existir, $f'(1)$ .
    Resp.: $f'(1) = 2$

36. Encontre a função derivada de:

    (a) $f(x) = k$, onde $k \in \mathbb{R}$
    (b) $f(x) = x$
    (c) $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$
    (d) $f(x) = x^{1/n}$, onde $n \in \mathbb{N}$
    (e) $f(x) = \sin(x)$
    (f) $f(x) = \cos(x)$
    (g) $f(x) = e^x$
    (h) $f(x) = \ln(x)$

    Resp.: veja Tabelas no Slide 05: Derivada.

## E5.1 Regras de derivação

37. Encontre a função derivada de:

    (a) $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{Z}$
    (b) $f(x) = \tan(x)$
    (c) $f(x) = \sec(x)$
    (d) $f(x) = \sqrt[3]{x}\sin(x)$

    Resp.: veja Tabelas no Slide 05: Derivada.
    (37d) $D_{f'} = \mathbb{R}$ e $f'(x) = \begin{cases} x^{1/3}\cos(x) + \frac{1}{3}x^{-2/3}\sin(x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

38. Encontre a função derivada de:

    (a) $f(x) = x^{p/q}$, onde $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$
    (b) $f(x) = x^a$, onde $a \in \mathbb{R}$
    (c) $f(x) = \sinh(x)$
    (d) $f(x) = \cosh(x)$ (tarefa!)

    Resp.: veja Tabelas no Slide 05: Derivada.

39. Encontre a função derivada de:

    (a) $f(x) = (x^2 + 2x)^{100}$
    (b) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 8}$
    (c) $f(x) = \cos(2x + \ln(x))$

    Resp.: Todas as funções são deriváveis em todos os pontos de seus domínio e vale:
    (a) $f'(x) = 100(2x + 2)(x^2 + 2x)^{99}$; (b) $f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+8}}$;
    (c) $f'(x) = -\sin(2x + \ln(x))(2 + \frac{1}{x})$

40. Encontre a função derivada de:

    (a) $f(x) = \arcsin(x)$
    (b) $f(x) = \arccos(x)$ (tarefa!)
    (c) $f(x) = \sinh^{-1}(x)$
    (d) $f(x) = \cosh^{-1}(x)$ (tarefa!)

    Resp.: veja Tabelas no Slide 05: Derivada.

41. Encontre a derivada de:

    (a) $f(x) = \ln(-x)$
    (b) $f(x) = 2^x$
    (c) $f(x) = \tan(e^{2x})$
    (d) $f(x) = \sin(x^3)$
    (e) $f(x) = \sin^3(x)$
    (f) $f(x) = \arcsin(x^2 - 5x)$

    Resp.: (a)$f'(x) = \frac{1}{x}$; (b) $f'(x) = 2^x \ln 2$; (c) $f'(x) = 2e^{2x} \sec^2(e^{2x})$; (d) $f'(x) = 3x^2 \cos(x^3)$; (e) $f'(x) = 3\sin^2(x)\cos(x)$; (f) $f'(x) = \frac{2x-5}{\sqrt{1-(x^2-5x)^2}}$

42. Encontre a derivada de ordem pedida

    (a) $f(x) = x^4 + 2x^2 + x, \quad f^{(5)} = ?$
    (b) $f(x) = x^2 \cos(x), \quad f'' = ?$
    (c) $f(x) = e^x, \quad f^{(k)} = ?,\ k \in \mathbb{N}$
    (d) $f(x) = \ln(x^2 + 1), \quad f'' = ?$

    Resp.: (a) $f^{(5)}(x) = 0$; (b) $f''(x) = -2\left((x + 1)\sin(x) + (x - 1)\cos(x)\right)$;
    (c) $f^{(k)} = e^x$; (d) $f''(x) = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$

43. Sabendo que $y = f(x)$, encontre $y'$.

    (a) $y^2x + \cos(xy) = 2$
    (b) $x^2y^3 + e^{2xy} - \sqrt{x^2 + y^2}$

    Resp.: (a) $y' = \frac{y\sin(xy)-y^2}{2xy-x\sin(xy)}$; (b) $y' = \frac{x(x^2+y^2)^{-1/2}-2xy^3-2ye^{2xy}}{3x^2y^2+2xe^{2xy}-y(x^2+y^2)^{-1/2}}$

## E6 Máximos e mínimos

44. Estude máximos e mínimos de $f$ em seu domínio natural

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = x^3$

Resp.: (a) $f(0) = 0$ é vma de $f$ e $\mathbb{R}$ e $f$ não tem máximos locais/absolutos; (b) $f$ não tem máximos e mínimos locais/absolutos

45. Encontre valores absolutos de

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ em $[0, 3]$.

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ em $[1, 2]$.

Resp.: (a) $f(1) = -2$ é vma e $f(3) = 19$ é VMA; (a) $f(1) = \frac{1}{2}$ é vma e $f(2) = \frac{2}{3}$ é VMA (note que $f$ não tem extremos locais/absolutos em $\mathbb{R}$)

46. Considere $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g$ uma função tal que $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. Dê um exemplo da função $g$.

Resp.: $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 1, & x > 0 \\ \frac{1}{x} - 4, & x < 0 \end{cases}$

47. Determine os pontos de extremos locais de

(a) $f(x) = 5 - 2x^2 + x^3$

(b) $f(x) = x^2 e^x$

Resp.: (a) $x = 0$ é PML e $x = \frac{3}{4}$ é pml. Note que $f$ não possui extremos absolutos. (b) $x = 0$ é pml e $x = -2$ é PML

48. Faça um estudo da função e esboce seu gráfico.

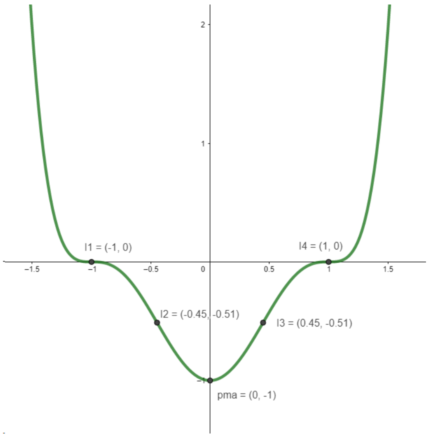
(a) $f(x) = (x^2 - 1)^3$

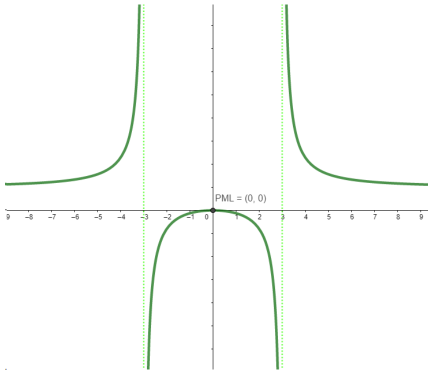
(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

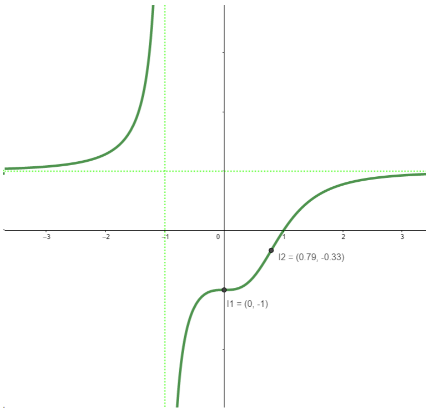
(c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$

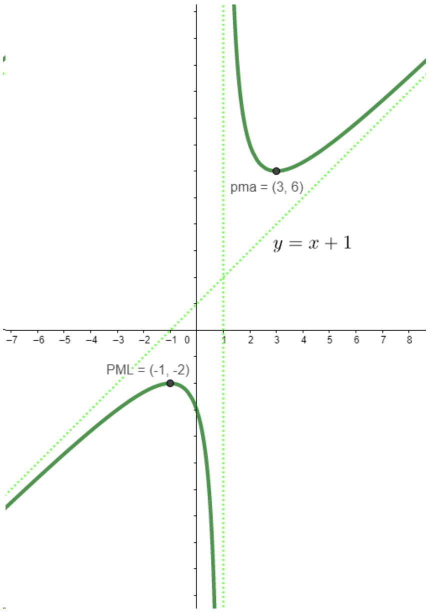
(d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$

Resp.:

(a) 


(b) 


(c) 


(d) 


## E7 L'Hôpital

49. Calcule os limites

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2+3x+2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^3 x}{x^2}$

Resp.: (a) -1; (b) $-\frac{1}{6}$; (c) $+\infty$; (d) 0; (e) 0;

## E8 Polinômio de Taylor

50. Calcule o valor aproximado para $\cos(0.01)$ e dê uma estimativa do erro cometido quando usado:

    (a) polinômio de Taylor de ordem 1 no ponto 0: $T^1_{\cos,0}$

    (b) polinômio de Taylor de ordem 2 no ponto 0: $T^2_{\cos,0}$

    Resp.: (a) $T^1_{\cos,0}(x) = 1$, $\cos(0.01) \approx 1$ e $|E^2_0(0.01)| \leq 10^{-4}$;
    (b) $T^2_{\cos,0}(x) = T^3_{\cos,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, $\cos(0.01) \approx \mathbf{0.99995}$ e $|E^2_0(0.01)| \leq 10^{-6}$ e $|E^3_0(0.01)| \leq 10^{-8}$.
    Segundo a calculadora $\cos(0.01) = \mathbf{0.99995000}41$: no item (a) o erro cometido foi por excesso e no item (b) por falta.

## E9 Aplicações

51. Um galpão deve ser construído tendo uma área retangular de 12.100m$^2$. A prefeitura exige que exista um espaço livre de 25m na frente, 20m atrás e 12m de cada lado do terreno. Encontre as dimensões do terreno que tenha área mínima na qual possa se construir este galpão.
    Resp.: O terreno deve ter aproximadamente 20.409$m^2$: 104.33m de comprimento por $195,62$m de largura.

52. Um bote é puxado em direção ao ancoradouro por uma corda que está atada na proa do bote e que passa por uma polia sobre o ancoradouro (que está 1m mais alto do que a proa do bote). Se a corda for puxada a uma taxa de 1m/s, quão rápido está se aproximando o bote do ancoradouro quando ele estiver a 8m dele?
    Resp.: se aproxima a uma taxa de 1,0077 m/s

Fonte: Stewart, Cálculo 1.

## E10 Revisão para P2

53. Calcule os limites (sem usar a Regra de L'Hopital):

(a) Ex. 31b: $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/2x}$

(b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

(c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

(d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^p-1}{x}$

Resp.: (a) $\sqrt{e}$; (b) 1; (c) 1; (d) $p$

54. Determine: o domínio de $f$, a derivada de $f$ e o domínio de $f'$.

(a) $f(x)=\cos(x\ln(2x^4+2x^2))$

(b) $f(x)=\dfrac{e^{\sin x}-\tan 2x}{x^2+4}$;

(c) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}\sin(x-1)$

Resp.: (a) $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}-\{0\}$; (b) $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}-\{\pi/4+k\pi/2, k\in\mathbb{Z}\}$; (c) $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}$.

55. Encontre $f'$ e seu domínio, onde $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x}{x^2}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

Resp.: $f'(x)=-2/x^2, \quad D_{f'}=\mathbb{R}-\{0\}$

56. Determine, caso existam, as assíntotas verticais, horizontais e oblíquas do gráfico de

(a) $f(x)=(x-4)^{1/3}-3$;

(b) $g(x)=\sqrt[3]{x^3-x}$;

(c) $h(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$;

(d) $f(x)=x+\ln x$.

Esboce o gráfico das funções acima.
Resp.: (a) não tem AV, AO, AH (b) não tem AV, AH, AO: $y=x$ (c) não tem AO, AV: $x=-1$, AH: $y=1$ (d) AV: $x=0$ não tem AO, AH

57. Considere $f(x)=x+\ln x$.

(a) Mostre que $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ admite função inversa $g$.

(b) Mostre que $g$ é derivável.

(c) Verifique que $g'(x) = \dfrac{g(x)}{1+g(x)}$.

Resp.: (a) verifique se $f$ é estritamente crescente ou decrescente em $(0,\infty)$; (b) e (c): use o teorema da derivada da função inversa

58. Se $y = e^x \cos x$, verifique que $y'' - 2y' + 2y = 0$.

59. Se $g$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, $g(1) = 4$, $g'(1) = 2$ e $f(x) = xg(x^2)$, calcule $f'(1)$.
Resp.: $f'(1) = 8$

60. Se $y = f(x)$ é uma função derivável tal que $2y^2e^{2x} - \sin(x^3y^4) = 2\ln(xy)$, encontre $y'$.
Resp.: $y' = \dfrac{\frac{2}{x} - 4y^2e^{2x} + 3x^2y^4\cos(x^3y^4)}{4ye^{2x} - 4x^3y^3\cos(x^3y^4) - \frac{2}{y}}$

61. Determine a equação da reta que é perpendicular à reta $2y+x = 3$ e tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$.
Resp.: $y = 2x - 25/4$

62. Use o polinômio de Taylor de $f(x) = \ln(x)$ de ordem 1 em $p = 1$ para encontrar um valor aproximado de $\ln(1.2)$. Encontre uma estimativa do erro cometido nessa aproximação usando o Teorema do P.d.T. com resto de Lagrange.
Resp.: $T^1_{f,1}(x) = x - 1$; $|E^2_1(1.2)| < 10^{-1}$