Este arquivo contém alguns dos exercícios que foram resolvidos ou discutidos durante as aulas. Seus enunciados podem não estar completos e pode ser que durante as aulas importantes comentários sobre as resoluções tenham sido feitos.[1]

Conteúdo

E.1 Integral Definida

1. Encontre $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2} dx \in [a, b]$.
   Resp.: $a = 1, b = e$

2. Usando interpretação geométrica de integral definida, calcule $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.
   Resp.: $\frac{\pi}{4}$

3. Verifique que:
   (a) função constante é integrável em qualquer intervalo fechado $[a, b]$
   (b) $f(x) = e^{x^2}$ é integrável em qualquer intervalo fechado $[a, b]$
   (c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ é integrável em $[-1, 1]$

   Resp.: aplique o Teorema I.1.2 (de integrabilidade das contínuas).

[1]Caso você encontre algum erro neste arquivo, por favor, reportá-lo para apperon@icmc.usp.br

4. Calcule

   (a) $\displaystyle\int (5x - x^2)dx$

   (b) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2}\right) dx.$

   (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx.$

   Resp.: (a) $5\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c$; (b) $-\frac{1}{x} + c$; (c) $\ln|x| + c$

5. Calcule, mas antes verifique se a função é integrável no intervalo:

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx.$

   Resp.: $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ é contínua em $[-2,-1] \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, portanto integrável em $[-2,-1]$ e $\int_{-2}^{-1} f = \frac{1}{2} - \ln 2$

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left|x - x^2\right| dx.$

   Resp.: $f(x) = \left|x - x^2\right|$ é contínua em $[-1,2] \subset \mathbb{R}$, portanto integrável em $[-1,2]$ e $\int_{-1}^{2} f = \frac{11}{6}$

6. Encontre o domínio (considerando integral no sentido próprio) da função h e sua derivada h':

   (a) $\displaystyle h(x) = \int_2^x \frac{\cos^2(t-1)}{\sqrt{t^2+1}}dt.$ Resp.: $D = \mathbb{R}$, $h'(x) = \frac{\cos^2(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$

   (b) $\displaystyle h(x) = \int_2^x \frac{1}{t^2}dt.$ Resp.: $D = (0,\infty)$, $h'(x) = \frac{1}{x^2}$

   (c) $\displaystyle h(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t}dt.$ Resp.: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $h'(x) = \frac{2}{x}$

   (d) $\displaystyle h(x) = \int_{-1}^{x^2} \frac{1}{t}dt.$ Resp.: $D = \emptyset$

7. Expresse a área da região R, limitada pelas curvas dadas, de duas formas: usando integração em x e integração em y. Calcule área usando uma das formas.

(a) $y = x^3$, $x = -1$, $x = 2$, eixo x. Resp.: $\frac{17}{4}$

(b) $y = x^2$, $y = 16 - x^2$. Resp.: $\frac{128\sqrt{2}}{3}$

(c) $y = x + 5$, $y = -1$, $y = 2$, $y^2 = x$. Resp.: $\frac{33}{2}$

E.2 Técnicas de integração

E.2.1 Substituição

8. Calcule e quando tratar de função determine seu domínio:

(a) $\displaystyle\int_0^1 x\cos(x^2+5)dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx.$

(c) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x\ln^2(3x)}dx.$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}dx.$

Resp.:(a) $\frac{\sin 6 - \sin 5}{2}$; (b) $\frac{e-1}{2}$; (c) $\begin{cases} \ln(\ln 3x) + \frac{\ln 3}{\ln 3x} + c, & x \in (\frac{1}{3}, \infty) \\ \ln(-\ln 3x) + \frac{\ln 3}{\ln 3x} + c, & x \in (0, \frac{1}{3}) \end{cases}$; (d) $\dfrac{\arctan(x^2)}{2} + c, x \in \mathbb{R}$

9. Sendo f integrável em $[-a, a]$, calcule $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx$ quando f é par e quando f é ímpar.

Resp.: $\begin{cases} 0, & \text{se } f \text{ é ímpar} \\ 2\int_0^a f, & \text{se } f \text{ é par} \end{cases}$

10. Quanto vale $\displaystyle\int_{-2}^{-1} x^4\sin(x^3)dx - \int_{-2}^{1} x^4\sin(x^3)dx$?

Resp.: 0

E.2.2 Integração por partes

11. $\displaystyle\int_1^4 x\ln(x)dx.$

Resp.: $8\ln 4 - \frac{15}{4}$; $(\int x\ln x\,dx = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + c, \quad x > 0)$

12. $\displaystyle\int \arctan(x)dx.$

Resp.: $x\arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + c, \quad x \in \mathbb{R}$

E.2.3 Integrais trigonométricas

13. $\displaystyle\int \cos^2(x)dx.$

Resp.: $\frac{\sin(2x)+2x}{4} + c, \quad x \in \mathbb{R}$

14. $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos^{\mathbf{3}}(x)dx.$

Resp.: $\frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5} + c, \quad x \in \mathbb{R}$

15. $\displaystyle\int \tan^{\mathbf{3}}(x)\sec^{\mathbf{4}}(x)dx.$

Resp.: $\begin{cases} \frac{\tan^6(x)}{6} + \frac{\tan^4(x)}{4} + c, \quad x \in I & I \text{ intervalo} \\ \frac{\sec^6(x)}{6} - \frac{\sec^4(x)}{4} + c, \quad x \in I & I \subset \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$

E.2.4 Substituição trigonométrica/hiperbólica

16. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$

Resp.: $\frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + c, \quad x \in [-1,1]$

17. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx.$

Resp.: $\ln(2x + \sqrt{4x^2+1}) + c, \quad x \in \mathbb{R}$

E.2.5 Frações Parciais

18. $$\int \frac{2x^2-5x-3}{(x+1)(x^2+1)}\, dx.$$

Resp.: $2\ln|x+1| - 5\arctan(x) + c$

19. $$\int \frac{x^5+1}{x^4-x^2}\, dx.$$

Resp.: $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \ln|x-1| + c$

20. $$\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\, dx.$$

Resp.: $\ln|x| + \frac{1}{x^2+1} + c$

21. $$\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\, dx.$$

Resp.: $\dfrac{\ln\left(x^2+2x+3\right)}{2} + c$

22. (!) $$\int \frac{x+2}{x^2+2x+3}\, dx.$$

Resp.: $\frac{1}{2}\ln((x+1)^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + c$

E.3 Integrais Impróprias

23. $$\int_0^1 \ln(x)\, dx.$$

Resp.: -1 (convergente)

24. $$\int_0^a \frac{1}{x^p}\, dx \ (a > 0).$$

Resp.: $\frac{a^{1-p}}{1-p}$ (convergente) se $p < 1$; divergente se $p \geq 1$

25. $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \ (a > 0).$

Resp.: $\frac{1}{a^{p-1}(p-1)}$ (convergente) se $p > 1$; divergente se $p \leq 1$

26. $\displaystyle\int_a^\infty e^{kx}\,dx \ (a \in \mathbb{R}).$

Resp.: $-\frac{e^{ka}}{k}$ (convergente) se $k < 0$; divergente se $k \geq 0$

27. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx.$

Resp.: divergente

28. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$

Resp.: convergente

29. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx.$

Resp.: divergente

30. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin^3(x)\,dx.$

Resp.: convergente

31. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$ Resp.: convergente

32. $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx.$ Resp.: divergente

E.4 Aplicações de integral de Riemann

33. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ e acima do eixo-x de $x = 0$ até $x = 1$.
Resp.: $\frac{\pi}{2}$

34. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo y da região limitada por $y = 2x^2 - x^3$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$.
Resp.: $\frac{16\pi}{5}$

35. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo y da região limitada por $y = x^3$, $y = 8$ e $x = 0$.
Resp.: $\frac{96\pi}{5}$

36. Considere a região R limitada por $y = x$ e $y = x^2$. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação de R (tarefa)

    (a) ao redor do eixo x;

    (b) ao redor da reta $y = 2$.

    Resp: (a) $\frac{2\pi}{15}$; (b) $\frac{8\pi}{15}$

37. Considere S a superfície obtida pela rotação da curva $y = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$, em torno do eixo-x (conhecida como trombeta de Gabriel) e B o sólido obtido pela rotação da região $R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \frac{1}{x}, x \geq 1\}$ em torno do eixo-x. Determine a área de superfície de S e o volume do sólido B.
Resp.: $A_S = \infty$ e $V(S) < \infty$

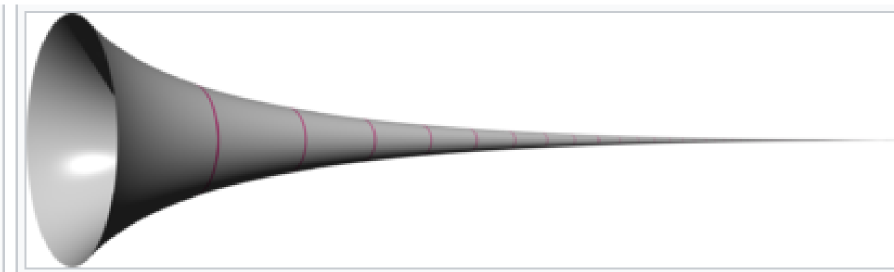

Figura 1: Wikipedia: Trombeta de Gabriel (Gabriel's horn) (leia sobre o "paradóxo do pintor")

E.5 Revisão para P3

38. Classifique as integrais abaixo como: família de funções, função ou número. Encontre o domínio quando se tratar de função (considere integral no sentido próprio).

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x}\, dx$ (b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^{x} \sqrt[3]{y}\, dy$

39. Encontre o domínio das funções integrais a seguir considerando a integral

(a) no sentido próprio;

(b) no sentido impróprio.

i. $h(x) = \displaystyle\int_{1}^{x^2} \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\, dy$ ii. $h(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x^2} \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\, dy.$

Resp.: (i)-(a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, (i)-(b) $D = \mathbb{R}$;
(ii)-(a) $D = \emptyset$, (ii)-(b) $D = \mathbb{R}$

40. Calcule e quando tratar de função indique o domínio (considere a integral no sentido próprio):

(a) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx$. Resp.: $\frac{\ln^3(x)}{3} + c, x > 0$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\ln(x^2)}{x^3}\, dx$. Resp.: $\frac{3-\ln 4}{8}$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2\,(x^2+1)}\, dx$. Resp.: $-2\arctan(x) - \frac{3}{x} + c, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+9)^2}\, dx$. Resp.: $\frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{\arctan\left(\frac{x}{3}\right)}{54} + c, x \in \mathbb{R}$

41. Calcule ou discuta a convergência:

(a) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{x^3}{x^4+3}\, dx$. Resp.: divergente

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx$. Resp.: convergente

42. Faça um esboço da região limitada pelas curvas $y = e^{-x}$, $y = -x-1$, $x = 0$ e $x = 4$ e escreva a sua área:

    (a) usando integrais em x;

    (b) usando integrais em y.

    Resp.: (a) $A = \int_0^4 (e^{-x} + x + 1)dx$;
    (b) $A = \int_{-5}^{-1}(4+y+1)dy + \int_{-1}^{e^{-4}} 4\,dy + \int_{e^{-4}}^{1}(-\ln y)dy$

43. Exercício 36.

Fim do curso! *Bons estudos!*

Boas Férias!