Este arquivo contém alguns dos exercícios que foram resolvidos ou discutidos durante as aulas. Seus enunciados podem não estar completos e pode ser que durante as aulas importantes comentários sobre as resoluções tenham sido feitos.[1]

Conteúdo

A1 Indução

1. Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$, vale:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *(tarefa!)*

2. Sejam $a_1 = 1$ e $a_n = 2a_{n-1} + 1$. Prove que $a_n = 2^n - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

[1]Caso você encontre algum erro neste arquivo, por favor, reportá-lo para apperon@icmc.usp.br

3. Se $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ e $a_n = a_{n-2} - 2a_{n-1}$, então a_n é impar, para todo $n \in \mathbb{N}$.
   (tarefa: completar resolução!)

4. Sejam $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ e $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$. Prove que $a_n = 5 - 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. *(tarefa!)*

5. Todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pode ser fatorado como produto de números primos.

6. Se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$, então existem $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tais que $n = 3i + 5j$.

7. Exemplos errados! Encontre o erro na prova:

   (a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 < n$.

   dado $k \in \mathbb{N}$,

   HI: $p(k) : k + 1 < k$

   Tese: $p(k + 1) : k + 2 < k + 1$

   Claro que $k + 2 = (k + 1) + 1 \overset{HI}{<} k + 1$.

   Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$ vale "$p(k) \Rightarrow p(k + 1)$"e portanto $p(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Dado $C \subseteq \mathbb{N}$ finito, se existe $p \in C$ par, então todo $p \in C$ é par.

   $p(n)$: para todo $C \subset \mathbb{N}$ com $\#C = n$ vale $\star$: (se existe $p \in C$ par, então todo $p \in C$ é par)

   Caso base: $p(1)$ é verdadeiro porque para qualquer conjunto C de 1 elemento, se existe um par em C, todo elemento de C é par dado $k \in \mathbb{N}$,

   HI: $p(k)$: para todo $C \subset \mathbb{N}$ com $\#C = k$ vale $\star$

   Tese: $p(k + 1)$: para todo $W \subset \mathbb{N}$ com $\#W = k + 1$ vale $\star$

   Seja $W \subset \mathbb{N}$ com $\#W = k + 1$ tal que existe $p \in W$ par.

   Tome $V_1 \subset W$ com k elementos e tal que $p \in V_1$. Pela HI, todos elementos de V_1 são pares.

   Tome $V_2 \subset W$ com k elementos de forma que p e o elemento de $W \setminus V_1$ estejam em V_2.

   Pela HI, todos elementos de V_2 são pares.

   Logo, todos elementos de W são pares.

   Portanto, o passo de indução é verdadeiro e $p(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

A2 Sup, inf, ponto de acumulação

8. Determine o sup e o inf dos conjuntos:

   (a) $\inf(0, 1) = \inf[0, 1] = 0$

   (b) $\inf \mathbb{N} = 1, \quad \sup \mathbb{N} = \infty$

   (c) $\inf\{1/n : \ n \in \mathbb{N}\} = 0$

   (d) $\inf_{x \in \mathbb{R}} x^2 - x = -1/4$

   (e) $\inf_{x \in \mathbb{Z}} x^2 - x = 0$

9. Ponto de acumulação: denote por A' o conj. dos p.a. de A
   (a) $A' = [0,1]$ se $A = (0,1)$ e também se $A = [0,1]$
   (b) $A' = \{0\}$ se $A = \{1/n : \; n \in \mathbb{N}\}$
   (c) $\mathbb{N}$ não possui pontos de acumulação
   (d) $A' = \{(0,y); y \in [-1,1]\} \cup A$ se A é o gráfico de $\sin(1/x)\,|_{x>0}$

A3 Sequências numéricas

10. Indique o domínio, ilustre o gráfico e/ou imagem da sequência $\{a_n\}$, onde:
    (a) $a_n = n$;
    (b) $a_n = \dfrac{1}{n}$;
    (c) $a_n = (-1)^n$;
    (d) $a_n = \log(n-2)$;
    (e) $a_n = 2^n$; *(tarefa!)*
    (f) $a_n = \ln(1+n)$; *(tarefa!)*
    (g) $a_n = (\cos(n), \sin(n))$;

    Graficos em Geogebra

11. Determine se a sequência $\{a_n\}$ é monótona, limitada, onde:
    (a) $a_n = n$; *(tarefa!)* est. crescente, limitada inferiormente
    (b) $a_n = \dfrac{1}{n}$; est. decrescente, limitada
    (c) $a_n = (-1)^n$; não monótona, limitada
    (d) $a_n = \log(n-2)$; *(tarefa!)* est. crescente, limitada inferiormente
    (e) $a_n = \dfrac{1}{n!}, n \geq 0$; decrescente, limitada
    (f) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}, n \geq 1$; est. crescente, limitada inferiormente

12. (definitivamente)
    (a) $a_n = -8 + n$; def. positiva
    (b) $a_n = n^2 - 8n$; def. est. crescente
    (c) $\{1, 8, 10, -15, 2, 1, 2, 2, 2, 2, \ldots\}$ def. constante

13. Determine se $\{b_k\}$ é uma subsequência da sequencia $\{a_n\}$:

(a) $a_n = \frac{1}{n}$;
$\{b_k\} = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \ldots\}$ sim

$\{b_k\} = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \ldots\}$ não

(b) $a_n = (-1)^n$;
$\{b_k\} = \{a_{2k}\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$ sim
$\{b_k\} = \{a_{2k+1}\} = \{-1, -1, \ldots\}$ sim

14. Calcule:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+3}{n+1} = +\infty$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

(c) * $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q^n$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty \quad (a > 1)$

15. Calcule:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$ *(tarefa)*

(b) * $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

16. Determine se a sequência $\{a_n\}$ é convergente, onde:

(a) $a_n = (-1)^n$ não conv., oscila

(b) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ não convergente *(tarefa)*

17. Determine se existe: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe

18. Resolva a recorrência usando: método de iteração ou lineares a coeficientes constantes e quando $a_n = f(a_{n-1})$ estude a recorrência através do gráfico de f:

(a) $a_0 = h$, $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta$ (veja Ex.2) Resp.: $a_n = \alpha^n h + \beta \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i$

(b) $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1}^2$ Resp.: $a_n = 2^{2^{n-1}}$

(c) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$, *(seq. Fibonacci)*
Resp.: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

(d) $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$, $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_1 = 4 \end{cases}$

Resp.: $a_n = 2^{1-2^{-n}}$

(e) $a_n = \sin(a_{n-1}) + a_{n-1}$ *veja o Geogebra, "caos"dependendo de a_1...*
Wrolfram - recorrencia Recorrências em Geogebra

19. (limsup, liminf)

(a) $a_n = \frac{1}{n}$ $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = 0$

(b) $a_n = (-1)^n$ $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$

(c) $a_n = n$ $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(d) $a_n = \sin(n)$ $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$

(e) $a_n = \sin(n\pi/4)$ *(tarefa!)* $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$

20. Verifique que a sequência $\{\frac{1}{n}\}$ é de Cauchy. *(tarefa!)*

21. Verifique que a sequência $\{a_n\}$ cujo termo geral é dado por

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$$

não é de Cauchy. Conclua que $\{a_n\}$ diverge.

A4 Séries numéricas

22. Encontre a soma (se convergente) de

(a) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *harmônica* diverge para $+\infty$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 1$ diverge para $+\infty$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 0$ converge para 0

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge para $+\infty$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ oscila, não convergente

(f) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *telescópica* conv. p/ 1

(g) * $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *geométrica* $\begin{cases} \text{converge para } 1 & \text{se } q = 0 \text{ (considerando } 0^0 = 1) \\ \text{diverge para } +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{oscila} & \text{se } q \leq -1 \\ \text{converge para } \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \end{cases}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ converge para $-\frac{1}{3}$

23. Usando séries, represente em fração a dizima periódica $0.234\overline{56}$.

Resp.: $\dfrac{23456 - 234}{99.000}$

Qual fração representaria $0.\overline{xxx}$? e $0.yy\overline{xxx}$? *(tarefa!)* Resp.: $\dfrac{xxx}{999}$; $\dfrac{yyxxx - yy}{99.900}$

24. Discuta a convergência da série (use o Teorema B1.4 [Cond necessária para convergência]):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge para $+\infty$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}\right)$ *(tarefa!)* diverge para $+\infty$

25. Estude a convergência da série (use o Teorema B2.2 [Confronto]):

(a) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10+\cos(n)}{15}\right)^n$

(b) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha},\ \alpha\geq 2$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^3}$ *(tarefa!)* (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10+\cos(n)}{5}\right)^n$

(c) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha},\ \alpha 1$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10+\cos(n)}{10}\right)^n$

* *série α-harmônica*

Resp.: (a) converge para $s\in(1,2)$; (b) converge para $s\in(1,2)$; (c) diverge para $+\infty$; (d) diverge para $+\infty$; (e) converge (Dica: use o limite $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$ para verificar que $\ln(n)\leq n$ definit.); (f) converge; (g) diverge; (h) diverge: $\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{10+\cos(n)}{10}\right)^n=+\infty$.

26. Discuta a convergência da série (use os Teoremas B2.8-B2.9 [Razão/raiz]):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n}$ $\begin{cases}\text{converge} & \text{se } |x|<1\\ \text{diverge} & \text{se } |x|\geq 1\end{cases}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2e^n}{(2n)!n^3}$ converge

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ converge (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2 5^n}{(2n)!n^3}$ diverge

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$ converge (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10+\cos(n)}{n}\right)^n$ converge

Quando $r>0$ e $p>0$, *(tarefa!)*

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n!}$ converge (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n^p}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}r^n n^p$

Resp. (h): $\begin{cases} \text{converge, se } 0 < r < 1,\ \forall p > 0 \\ \text{diverge, se } 0 < r < 1,\ \forall p > 0 \\ \text{série } p\text{-harmônica, se } r = 1 \end{cases}$ (i): $\begin{cases} \text{converge, se } 0 < r < 1,\ \forall p > 0 \\ \text{diverge, se } r > 1,\ \forall p > 0 \\ \text{diverge, se } r = 1,\ \forall p > 0 \end{cases}$

27. Discuta a convergência da série

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$ diverge

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ *(tarefa!)* converge

28. Encontre quantos termos da sequência $\{a_n\}$ é preciso somar para obter uma aproximação da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com erro $< 10^{-3}$.

(a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ (1001 termos)

(b) $a_n = \dfrac{1}{n!}$ (10 termos)

29. Discuta a convergência da série (use Teorema B2.14 [Confronto Integral][2]):

(a) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ quando $\alpha \in (1, 2)$ converge para $s \in [\frac{1}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1}] \subset (1, +\infty)$

(b) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^{\beta}}$ com $\beta > 0$ converge se $\beta > 1$ e diverge se $\beta \leq 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge

(d) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$ $(\alpha, \beta > 0)$ converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha < 1$ ($\alpha = 1$ item b)

30. Discuta a convergência das séries (Teorema B3.2 [Conv. absoluta]):

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n^2}$ (converge) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n}$ (inconclusivo) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ ((a,b,c) não converge)

nos quatro casos:

(a) $s_n = (-1)^n$

(b) $s_n = \cos(2\pi n/30)$,

(c) $s_n = \cos(n)$,

(d) s_n sequência limitada qualquer

[2]Relembrar integrais impróprias!! (Integrais Impróprias - Cálculo 2)

31. Discuta a convergência da série (Teorema B3.4 [Critério de Leibnitz]):

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$ converge

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$ converge *(tarefa!)*

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n}$ diverge

32. Encontre quantos termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ é preciso somar para obter uma aproximação da sua soma com erro $< 10^{-3}$. (1001 termos)

33. Discuta a convergência da série (Teorema B3.6 [Critério de Dirichlet]):

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n}$, onde: $s_n = \begin{cases} 2, & n = 3k \\ -1, & n \neq 3k \end{cases}$ converge *(tarefa!)*

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n/30)}{n}$ (ver Geogebra) converge

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n}$ converge

34. Encontre quantos termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n/30)}{n}$ é preciso somar para obter uma aproximação da sua soma com erro $< 10^{-3}$. *(tarefa!)* (60mil termos)

35. Podemos somar os elementos dos conjuntos de reais a seguir sem que seja definida uma ordem para somar?

   (a) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ sim

   (b) $\left\{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ sim

   (c) $\left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ não

   (d) $\left\{\frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ sim

   (e) $\left\{\pm\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ não

   (f) $\left\{\pm\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ sim

A5 Sequências de funções

36. Esboce os gráficos (veja em Geogebra) :

(a) $f_n(x) = x^n$;

(b) $f_n(x) = nx$;

(c) $f_n(x) = x/n$;

(d) $f_n(x) = \sin(nx)$;

(e) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$;

(f) $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{1+n^2x^2}}{n}$;

(g) $f_n(x) = \arctan(x+n)$;

(h) $f_n(x) = \begin{cases} 1-n|x| & |x| \le 1/n \\ 0 & |x| > 1/n \end{cases}$;

(i) $f_n(x) = \begin{cases} n^2x & 0 \le x \le 1/n \\ n(2-nx) & 1/n \le x \le 2/n \\ 0 & x > 2/n \; ou \; x < 0 \end{cases}$;

(j) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha} & x > 1/n \\ n^\alpha & 0 \le x \le 1/n \end{cases}$.

37. Discuta a convergência pontual das sequências do Exercício 36.

(a) $f_n \xrightarrow{p} f$ em $(-1,1]$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(b) $f_n \xrightarrow{p} 0$ em $\{0\}$; $\lim_{n\to\infty} nx = \begin{cases} +\infty, & x > 0 \\ -\infty, & x < 0 \end{cases}$

(c) $f_n \xrightarrow{p} 0$ em $\mathbb{R}$

(d) oscila se $x \neq 0$ e $f_n \xrightarrow{p} 0$ em $\{x : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(e) $f_n \xrightarrow{p} 0$ em $\mathbb{R}$

(f) $f_n \xrightarrow{p} |x|$ em $\mathbb{R}$

(g) $f_n \xrightarrow{p} \frac{\pi}{2}$ em $\mathbb{R}$

(h) $f_n \xrightarrow{p} f$ em $\mathbb{R}$ onde $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(i) $f_n \xrightarrow{p} 0$ em $\mathbb{R}$

(j) $f_n \xrightarrow{p} \frac{1}{x^\alpha}$ em $(0,\infty)$

38. Discuta a convergência uniforme das sequências (a,c,e,f) do Exercício 36.

(a) $f_n \xrightarrow{u} 0$ em $[-M,M]$, $\forall M \in (0,1)$

(c) $f_n \xrightarrow{u} 0$ em $[-M,M]$, $\forall M > 0$

(e) $f_n \xrightarrow{u} 0$ em $\mathbb{R}$

39. Usando o Teorema C1.7, estude a convergência uniforme das sequências (g, i, j) do Exercício 36.

(f) $f_n \xrightarrow{u} |x|$ em $\mathbb{R}$

(g) $f_n \not\xrightarrow{u} \frac{\pi}{2}$ em $\mathbb{R}$

(i) $f_n \not\xrightarrow{u} 0$ em qualquer subintervalo de $\mathbb{R}$

(j) $f_n \not\xrightarrow{u} \frac{1}{x^\alpha}$ em $(0,\infty)$

40. Considere a sequência do Exercício 36f. Verifique que $f_n' \xrightarrow{p} f$ em $\mathbb{R}$ mas $f_n' \overset{u}{\nrightarrow} f$ em $\mathbb{R}$, onde $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ *(tarefa!)*

A6 Séries de funções

41. Discuta a convergência pontual das séries

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ conv. pont. a $\frac{x}{1-x}$ em $(-1,1)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ conv. pont. em $[-1,1)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ conv. pont. em $[-1,1]$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ conv. pont. em $\mathbb{R}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ conv. pont. em $\mathbb{R}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ conv. pont. em $\mathbb{R}$

42. Discuta a convergência uniforme das séries do Exercício 41.

(a) conv. unif. em $[-r,r]$, $\forall r \in (0,1)$

(b) conv. unif. em $[-r,r]$, $\forall r \in (0,1)$

(c) conv. unif. em $[-1,1]$

(d) conv. unif. em $[-r,r]$, $\forall r > 0$

(e) conv. unif. em $\mathbb{R}$

(f) conv. unif. em $\mathbb{R}$

43. Discuta a continuidade e a derivabilidade das séries do Exercício 41.

(a) contínua e derivável em $(-1,1)$,

(b) contínua e derivável em $(-1,1)$,

(c) contínua em $[-1,1]$ e derivável em $(-1,1)$

(d) contínua e derivável em $\mathbb{R}$

(e) contínua em $\mathbb{R}$ e não é derivável em $\mathbb{R}$ (a série das derivadas não converge em $x = 0$)

(f) contínua e derivável em $\mathbb{R}$

A7 Séries de Potências

44. Encontre os raio e intervalo de convergências

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $R = 1$, $IC = (-1, 1)$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$, $R = 1$, $IC = [-1, 1)$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$, $R = 1$, $IC = [-1, 1]$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, $R = \infty$, $IC = \mathbb{R}$ $(ou\ \mathbb{C})$.

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$, $R = 0$, $IC = \{0\}$.

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n$, $R = 1$, $IC = (-1, 1)$.

45. Encontre o raio de convergência ou o IC:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (2 + \sin(n))^n x^n$, $R = \frac{1}{3}$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{3^n}$, $R = \sqrt{3}$, $IC = [1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}]$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(x-1) - 2)^n}{n^2 + 1}$, $IC = [1 + e, 1 + e^3]$.

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)^n}{n}$ *(tarefa!)*, $IC = [-2, 0]$.

46. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência uniforme: *(tarefa!)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3 + x}{2 + x} \right)^n$$

Resp.: $IC = (-\infty, -\frac{5}{2}]$ e uniformemente em $[M, -\frac{5}{2}], \forall M < -\frac{5}{2}$.

47. Encontre os IC da série S e de sua integral $\int_0^x S$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Resp.: $(-1, 1)$ e $[-1, 1)$ resp.

48. Encontre os IC da série S e de sua derivada S'

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

Resp.: $[-1, 1)$ e $(-1, 1)$ resp.

49. Escrever as funções abaixo como SDP:

$$e^x, \quad \sin(x), \quad \sinh(x), \quad \cos(x), \quad \cosh(x),$$
$$\frac{1}{1+x}, \quad \ln(x+1), \quad \frac{1}{1+x^2}, \quad \arctan(x).$$

Resp. Ver Slide 4

50. Calcular

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} xe^{\sqrt{1+x^2}}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+2}-1}{n!(2n+1)}$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sin(x^2)dx \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)}$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x\sin(x+1)}{(x+1)^2}dx$ *(tarefa!)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left[\frac{2^{2n+1}-1}{2n+1}-\frac{2^{2n}-1}{2n}\right]+1-\ln 2$

Encontre quantos termos da série devemos somar para que o valor da integral 50c tenha erro $\varepsilon < 10^{-3}$. Resp.: 2 termos: $I = \frac{13}{42}+\varepsilon$

51. Use SDP para calcular os limites

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0,$ *(tarefa!)*

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}-\frac{1}{2}}{x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\Big|_{x=0} = 0$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)-0}{x} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\Big|_{x=0} = -\frac{1}{12}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x(e^x-1-x)}{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}\right)^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^6$

A8 Aplicação: usando SDP para resolver PVI de EDO

52. Use SDP para resolver as EDO's

(a) $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ *(tarefa!)* $\displaystyle y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$ converge em $\mathbb{R}$

(b) $\begin{cases} -y'' = y \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$ $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b}{(2n+1)!} x^{2n+1} = a\cos x + b \sin x$ em $\mathbb{R}$

(c) $\begin{cases} y'' - xy' - y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2.4.6.\ldots.(2n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!!}$ converge em $\mathbb{R}$

(d) $\begin{cases} y' = \frac{\alpha}{1+x} y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$ converge em $(-1,1)$ quando $\alpha \notin \mathbb{N}$ (Série Binomial) e

$y(x) = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$ converge em $\mathbb{R}$ quando $\alpha \in \mathbb{N}$ (Binômio de Newton)

53. Prove que $\binom{-1}{n} = (-1)^n$.

54. Usando o Exercício 52d, encontre a SDP para

(a) $f(x) = \sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$ em $(-1,1)$

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n$ em $(-1,1)$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}$ em $(-1,1)$

(d) $f(x) = \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$ em $(-1,1)$

A9 Séries de Taylor e funções analíticas

55. Verifique que as funções e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$ e $\ln(x)$ são funções analíticas.

56. Encontre a SdT em torno de 0 de

$$f(x) = (1+x^2)\cos(x)$$

e calcule $f^{(3)}(0)$ e $f^{(10)}(0)$.

Resp.: $f(x) = T_{f,0}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n-2)!}\right] x^{2n}$; $f^{(3)}(0) = 0$ e $f^{(10)}(0) = 89$

57. Calcule o limite *(tarefa!)*

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^\alpha}.$$

Resp.: $L = \begin{cases} 0, & \alpha < 4 \\ \frac{1}{4!}, & \alpha = 4 \\ +\infty, & \alpha > 4 \end{cases}$

58. Encontre $T_{f,3}$, o IC e calcule $f^{(10)}(3)$, onde

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{4x+3}\right).$$

Resp.: $f(x) = T_{f,3}(x) = \ln(\frac{7}{15}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left[\left(\frac{2}{7}\right)^n - \left(\frac{4}{15}\right)^n\right] x^n$; $IC = (-\frac{1}{2}, \frac{13}{2}]$ e $f^{(10)}(3) = 9!\left[\left(\frac{2}{7}\right)^{10} - \left(\frac{4}{15}\right)^{10}\right]$

59. Encontre $T_{f,0}$, o IC e calcule $f^{(13)}(0)$ e $f^{(14)}(0)$, onde *(tarefa!)*

$$f(x) = (x^3 + x)e^{-x^2}.$$

Resp.: $f(x) = T_{f,0}(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}\right]x^{2n+1}$; $IC = \mathbb{R}$; $f^{(13)}(3) = 13!\left[\frac{1}{6!} - \frac{1}{5!}\right]$; $f^{(14)}(3) = 0$

Compare uma função f com o polinômio de Taylor T^k_{f,x_0} no Desmos ou Geogebra

A10 Séries de Fourier

60. Escreva as séries de Fourier das funções:

(a) $f(x) = sgn(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi] \qquad S_f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$

(b) $f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi] \qquad S_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$

(c) $f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi] \qquad S_f(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \le \pi \end{cases}$, sendo uma função par em $[-\pi, \pi]$

$S_f(x) = \frac{\pi - 1}{2\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n\pi} \cos(nx)$

(e) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le L \\ L, & -L < x < 0 \end{cases}$ *(tarefa!)*

$S_f(x) = \frac{3L}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2L}{(2n-1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right) + \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$

61. Analise a convergência das séries de Fourier (caso existam) das seguintes funções 2π-periódicas: (ver Geogebra)

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

não tem como calcular S_f pois f não é abs. integrável.

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $[2k\pi + \varepsilon, 2k\pi + 2\pi - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ mas em 0 não sabemos se nem onde converge.

(c) $f(x) = \sqrt{|x|}\Big|_{[-\pi,\pi]}$

podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $[2k\pi + \varepsilon, 2\pi + 2k\pi - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ mas em 0 não sabemos se nem onde converge.

(d) (60b) $f(x) = |x|\big|_{[-\pi,\pi]}$

podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $\mathbb{R}$

(e) (60c) $f(x) = x\big|_{(-\pi,\pi]}$

podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $[-\pi+2k\pi+\varepsilon, \pi+2k\pi-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, e converge para 0 em $\pi + 2k\pi$.

(f) (60a) $f(x) = sgn(x)\big|_{(-\pi,\pi]}$

podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $[2k\pi + \varepsilon, \pi + 2k\pi - \varepsilon]$ e em

$[-\pi + 2k\pi + \varepsilon, 2k\pi - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, e converge para 0 em $k\pi$.

(g) $f(x) = \sqrt[3]{x}|_{[-\pi,\pi)}$

podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $[2k\pi - \pi + \varepsilon, 2k\pi + \pi + \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, e converge para 0 em $\pi + 2k\pi$ (teo. conv. pontual) e também para 0 em $2k\pi$ (por ser ímpar).

(h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0,\pi) \setminus \{0\} \\ 0, & x = k\pi \end{cases}$ e ímpar em $[-\pi, \pi]$

podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $[2k\pi + \varepsilon, \pi + 2k\pi - \varepsilon]$ e em $[-\pi + 2k\pi + \varepsilon, 2k\pi - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, e converge para 0 em $\pi + 2k\pi$ (teo. conv. pontual) e também para 0 em $2k\pi$ (por ser ímpar).

(i) Exercício 60d

podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $[2k\pi - 1 + \varepsilon, 2k\pi + 1 - \varepsilon]$ e em $[2k\pi + 1 + \varepsilon, 2k\pi - 1 + 2\pi + \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, e converge para 0 em $0 + 2k\pi$ e também em $\pi + 2k\pi$ e para $\frac{1}{4}$ em $\pm 1 + 2k\pi$.

62. Usando os Exercícios 60d, 60b e 61, calcule o valor das séries

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n} = \frac{\pi}{2} - 1$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

63. Usando o Exercício 60c e a identidade de Parseval calcule o valor da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

64. Considere *(tarefa!)*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x \in [1,\pi]. \end{cases}$$

(a) Calcule a série de senos $S_{f,s}$ de f (estenda de forma conveniente f a $[-\pi, \pi]$)

(b) Para onde convergem $S_{f,s}(1)$, $S_{f,s}(-2)$, $S_{f,s}(2\pi)$? Justifique.

Resp.: $S_{f,s}(1) = \frac{1}{2}$, $S_{f,s}(-2) = -1$, $S_{f,s}(2\pi) = 1$

(c) Descreva o limite pontual e determine onde o limite é uniforme da série calculada.

(d) Desenhe os gráficos da função usada em (a) estendida 2π-periodicamente e da função $S_{f,s}$ (limite pontual da série calculada).

65. Escreva a série de Fourier da função 2π-periódica e ímpar, que em $[0, \pi)$ é dada pelas funções a seguir: *(tarefa!)*

(a) $f(x) = 25$,
(b) $f(x) = \sin(x)$,
(c) $f(x) = x$,
(d) $f(x) = \cos(x)$,
(e) $f(x) = x^2$.

Resp.: (b) $S_f(x) = \sin(x)$, (d) $S_f(x) = 0$,

66. Escreva a série de Fourier da função 2π-periódica e par, que em $[0, \pi]$ é dada pelas funções do Exercício 65. Compare os resultados. *(tarefa!)*
Resp.: (b) $S_f(x) = 0$, (d) $S_f(x) = \cos(x)$,

A11 Aplicação: usando séries de Fourier para resolver PVIF de EDP

67. Determine a solução por séries de Fourier do PVIF abaixo

(a)

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 & \text{para } x \in (0, \pi),\ t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 = u_x(\pi, t) & \text{para } t \geq 0 \\ u(x, 0) = x & \text{para } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) =??, \quad \lim_{t\to\infty} u_x(x, t) =??$$

É um PVIF para equação do calor/extremos isolados/Neumann e a **solução** é:

$$u(x, t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2} e^{-2(2n+1)^2 t} \cos((2n + 1)x)$$

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{t\to\infty} u_x(x, t) = 0$$

(b)

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & \text{para } x \in (0,\pi),\ t > 0 \\ u(0,t) = -2, u(\pi,t) = 2 & \text{para } t \geq 0 \\ u(x,0) = -2 & \text{para } x \in (0,\pi) \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = ??, \quad \lim_{t\to\infty} u_x(x,t) = ??$$

É um PVIF para equação do calor/extermos não isolados/Dirichlet não homogênea e a **solução generalizada** (note que $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ não é convergente) é:

$$u(x,t) = \frac{4x}{\pi} - 2 + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-4n^2 t} \sin(nx)$$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = v(x) = \frac{4x}{\pi} - 2, \quad \lim_{t\to\infty} u_x(x,t) = \frac{4}{\pi}$$

68. Resolva a equação do calor *(tarefa!)*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{em } (0,\pi)\times(0,\infty) \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t) & \text{para } t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \text{para } x \in (0,\pi) \end{cases}$$

sendo $f(x)$ cada uma das funções do Exercício 65 (use os resultados do Exercício 65).

69. Resolva a equação do calor nos casos do exercício anterior, substituindo a condição de extremos a temperatura costante $u(0,t) = 0 = u(\pi,t)$, pela condição de extremos isolados $u_x(0,t) = 0 = u_x(\pi,t)$ (use os resultados do Exercício 66) *(tarefa!)*

70. Para os problemas nos Exercícios 68 e 69, para onde converge a solução quando $t \to \infty$? Compare os resultados.
discuta a convergência uniforme de $u(x,0)$, $u(x,1)$ e $u_x(x,1)$. *(tarefa!)*
Resp.: Nos casos do Ex. 68 a solução generalizada tende a zero e nos casos do Ex. 69 a solução generalizada tende a media

Fim do curso! *Bons estudos!*