Zero de Funções

Prof. Afonso Paiva

Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
USP – São Carlos

Métodos Numéricos e Computacionais II – SME0306

Problema

Seja $f \in \mathcal{C}([a,b])$, queremos encontrar soluções para a **equação não-linear**:

$$\boxed{f(x) = 0}$$

Uma solução da equação acima (chamada de **raiz** ou **zero**) será denotada por α.

Problema

Seja $f \in \mathcal{C}([a,b])$, queremos encontrar soluções para a **equação não-linear**:

$$\boxed{f(x) = 0}$$

Uma solução da equação acima (chamada de **raiz** ou **zero**) será denotada por α.

Ao contrário das funções lineares

$$ax - b = 0 \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{a \neq 0} \quad \alpha = \frac{b}{a},$$

Equações não-lineares possuem um número indeterminado de zeros.

Métodos iterativos para encontrar raízes

- Raízes que podem ser obtidas de forma analítica são conhecidas para poucas funções não-lineares (polinômios de baixo grau);

Métodos iterativos para encontrar raízes

- Raízes que podem ser obtidas de forma analítica são conhecidas para poucas funções não-lineares (polinômios de baixo grau);
- Temos que recorrer aos métodos numéricos iterativos:
  Dado um **chute inicial** x_0, vamos gerar uma **sequência de iterados** $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ que (talvez) converge para uma raiz da função;

Métodos iterativos para encontrar raízes

- Raízes que podem ser obtidas de forma analítica são conhecidas para poucas funções não-lineares (polinômios de baixo grau);
- Temos que recorrer aos métodos numéricos iterativos: Dado um **chute inicial** x_0, vamos gerar uma **sequência de iterados** $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ que (talvez) converge para uma raiz da função;
- Requer um intervalo $[a, b]$ que contenha uma raiz;

Métodos iterativos para encontrar raízes

- Raízes que podem ser obtidas de forma analítica são conhecidas para poucas funções não-lineares (polinômios de baixo grau);
- Temos que recorrer aos métodos numéricos iterativos:
  Dado um **chute inicial** x_0, vamos gerar uma **sequência de iterados** $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ que (talvez) converge para uma raiz da função;
- Requer um intervalo $[a, b]$ que contenha uma raiz;
  - Pelo **TVI**, se $f \in \mathcal{C}([a, b])$ e $f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists\, \alpha \in (a, b)$;

Métodos iterativos para encontrar raízes

- Raízes que podem ser obtidas de forma analítica são conhecidas para poucas funções não-lineares (polinômios de baixo grau);
- Temos que recorrer aos métodos numéricos iterativos:
  Dado um **chute inicial** x_0, vamos gerar uma **sequência de iterados** $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ que (talvez) converge para uma raiz da função;
- Requer um intervalo $[a, b]$ que contenha uma raiz;
  - Pelo **TVI**, se $f \in \mathcal{C}([a, b])$ e $f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists\, \alpha \in (a, b)$;
  - Análise do gráfico da função (**plote** o gráfico de $f(x)$).

Critérios de Parada

Em geral, um método iterativo não encontra uma solução exata, mas sim uma solução (arbitrariamente) próxima a exata.

Critérios de Parada

Em geral, um método iterativo não encontra uma solução exata, mas sim uma solução (arbitrariamente) próxima a exata.

Vários testes podem ser usados para verificar a (quase) convergência: o processo iterativo **para** após k iterações se:

Critérios de Parada

Em geral, um método iterativo não encontra uma solução exata, mas sim uma solução (arbitrariamente) próxima a exata.

Vários testes podem ser usados para verificar a (quase) convergência: o processo iterativo **para** após k iterações se:

(CP1) número máximo de iterações: $k = k_{max}$ (e/ou);

Critérios de Parada

Em geral, um método iterativo não encontra uma solução exata, mas sim uma solução (arbitrariamente) próxima a exata.

Vários testes podem ser usados para verificar a (quase) convergência: o processo iterativo **para** após k iterações se:

(CP1) número máximo de iterações: $k = k_{max}$ (e/ou);

(CP2) erro absoluto: $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_a$ (e/ou);

Critérios de Parada

Em geral, um método iterativo não encontra uma solução exata, mas sim uma solução (arbitrariamente) próxima a exata.

Vários testes podem ser usados para verificar a (quase) convergência: o processo iterativo **para** após k iterações se:

(CP1) número máximo de iterações: $k = k_{max}$ (e/ou);

(CP2) erro absoluto: $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_a$ (e/ou);

(CP3) erro relativo: $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_r \, |x_k|$ (e/ou);

Critérios de Parada

Em geral, um método iterativo não encontra uma solução exata, mas sim uma solução (arbitrariamente) próxima a exata.

Vários testes podem ser usados para verificar a (quase) convergência: o processo iterativo **para** após k iterações se:

(CP1) número máximo de iterações: $k = k_{max}$ (e/ou);

(CP2) erro absoluto: $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_a$ (e/ou);

(CP3) erro relativo: $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_r\,|x_k|$ (e/ou);

(CP4) teste do resíduo: $|f(x_k)| < \tau$.

Critérios de Parada

Em geral, um método iterativo não encontra uma solução exata, mas sim uma solução (arbitrariamente) próxima a exata.

Vários testes podem ser usados para verificar a (quase) convergência: o processo iterativo **para** após k iterações se:

(CP1) número máximo de iterações: $k = k_{max}$ (e/ou);

(CP2) erro absoluto: $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_a$ (e/ou);

(CP3) erro relativo: $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_r \, |x_k|$ (e/ou);

(CP4) teste do resíduo: $|f(x_k)| < \tau$.

Os valores (tolerâncias) $\varepsilon_a, \varepsilon_r, \tau$ são pré-definidos pelo usuário.

Critérios de Parada

Considerações:

Critérios de Parada

Considerações:

- Geralmente, (CP3) é mais robusto que (CP2);

Critérios de Parada

Considerações:

- Geralmente, (CP3) é mais robusto que (CP2);
- Pode ser feita uma combinação de (CP2) e (CP3):

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon(1 + |x_k|)$$

Critérios de Parada

Considerações:

- Geralmente, (CP3) é mais robusto que (CP2);
- Pode ser feita uma combinação de (CP2) e (CP3):

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon(1 + |x_k|)$$

- Cuidado com (CP4), precisão não garantida:

Critérios de Parada

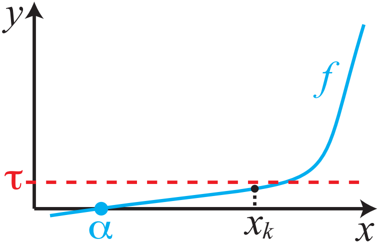
Considerações:

- Geralmente, (CP3) é mais robusto que (CP2);
- Pode ser feita uma combinação de (CP2) e (CP3):

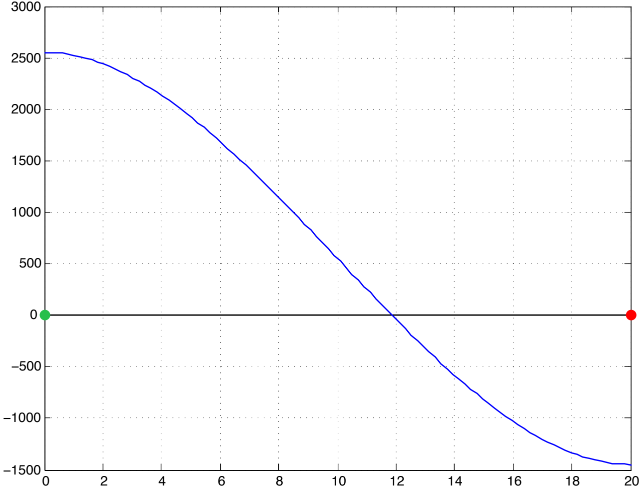
$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon(1 + |x_k|)$$

- Cuidado com (CP4), precisão não garantida:

$$|f(x_k)| < \tau \;\not\Longrightarrow\; |x_k - \alpha| < \varepsilon$$

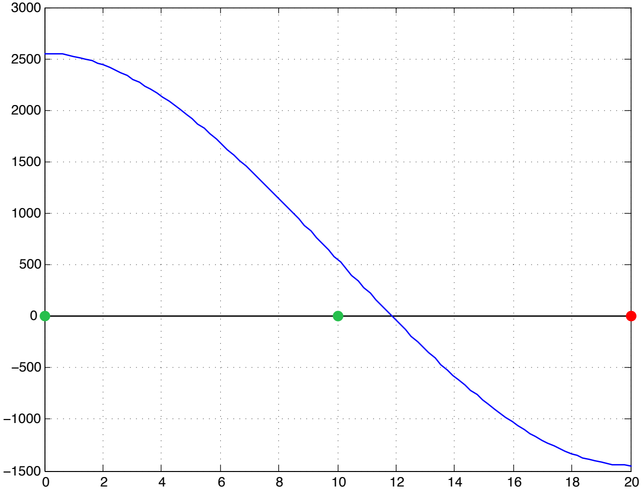


Método da Bisseção



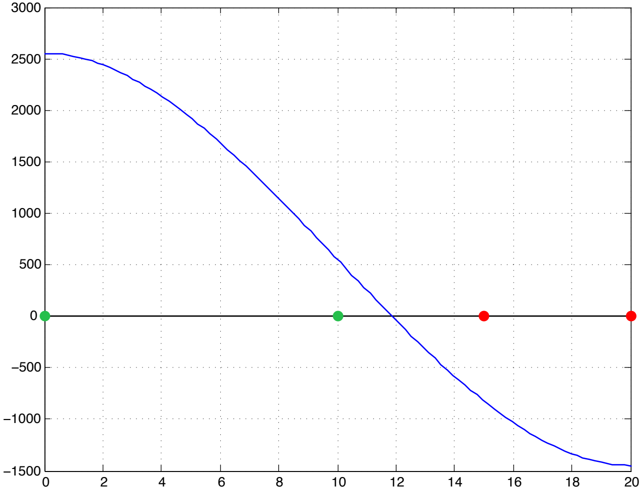
$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552\,, \quad x \in [0, 20]$$

Método da Bisseção



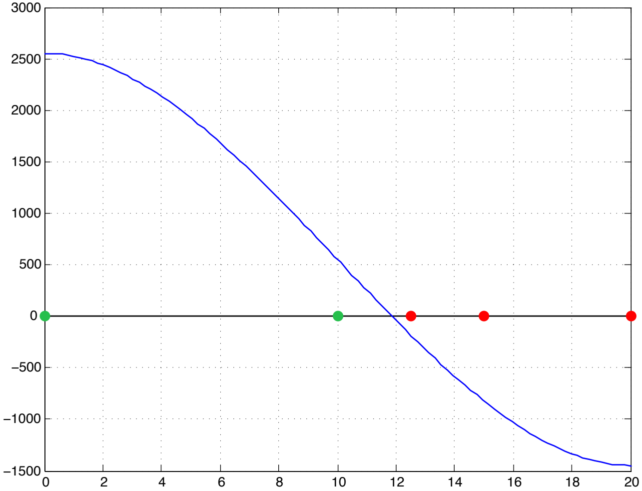
$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552\,, \quad x \in [0, 20]$$

Método da Bisseção



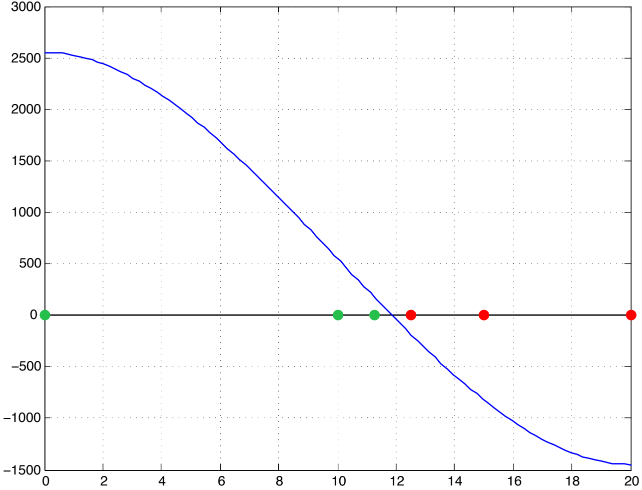
$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552\,, \quad x \in [0, 20]$$

Método da Bisseção



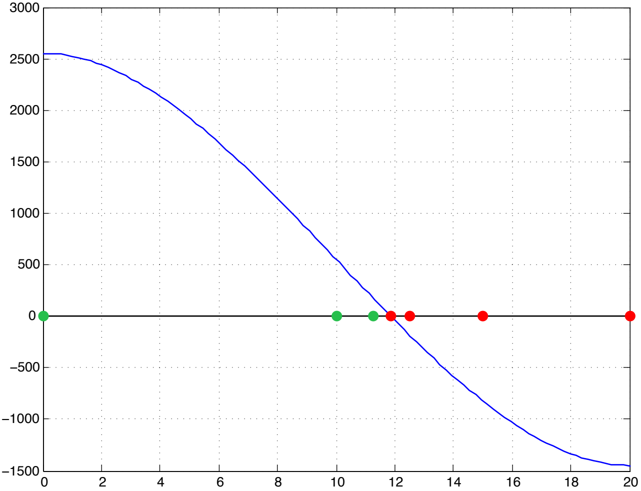
$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552\,, \quad x \in [0, 20]$$

Método da Bisseção



$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552\,, \quad x \in [0, 20]$$

Método da Bisseção



$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552\,, \quad x \in [0, 20]$$

Método da Bisseção

MATLAB

```
function x = bissecao(func,a,b,tol)
% [a,b]: intervalo com f(a)*f(b)<0

x = (a+b)/2;
erro = inf;

while erro>tol
    if func(a)*func(x) < 0
        b = x;
    else
        a = x;
    end;
    x0 = x;
    x = (a+b)/2;
    erro = abs(x-x0);
end;
```

Método da Bisseção

Propriedades

(+) Simples e fácil de implementar;

(+) Seguro e robusto (**não falha**);

(+) Convergência garantida (**teorema**);

(+) Requer apenas que $f \in \mathcal{C}([a,b])$;

(−) Lento e difícil de generalizar para sistemas de equações.

Método da Bisseção

Teorema

Suponha $f \in \mathcal{C}([a,b])$ *e* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *O método da bisseção gera uma sequência* $\{x_0, x_1, \ldots\}$ *que se aproxima de uma raiz* α *de* f *com*

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^k}\,.$$

Demonstração: veja livro de Burden & Faires (Seção 2.1).

Método da Bisseção

Teorema

Suponha $f \in \mathcal{C}([a,b])$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$. O método da bisseção gera uma sequência $\{x_0, x_1, \ldots\}$ que se aproxima de uma raiz α de f com

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^k}\,.$$

Demonstração: veja livro de Burden & Faires (Seção 2.1).

Se $|x_k - \alpha| < \varepsilon_a$, usando o teorema acima podemos estimar o número de iterações do método da bisseção:

$$\boxed{k = \lceil \log_2(b-a) - \log_2(\varepsilon_a) \rceil}$$

Método do Ponto Fixo

A classe de métodos discutidos agora possuem uma extensão direta para problemas mais complexos (exemplo, sistemas de equações não-lineares).

Método do Ponto Fixo

A classe de métodos discutidos agora possuem uma extensão direta para problemas mais complexos (exemplo, sistemas de equações não-lineares).

O problema $f(x) = 0$ pode ser reescrito da forma:

$$\boxed{x = g(x)\,.}$$

Método do Ponto Fixo

A classe de métodos discutidos agora possuem uma extensão direta para problemas mais complexos (exemplo, sistemas de equações não-lineares).

O problema $f(x) = 0$ pode ser reescrito da forma:

$$\boxed{x = g(x)\,.}$$

Dada a equação acima, estamos procurando por um **ponto fixo**, isto é, um ponto α que satisfaz $g(\alpha) = \alpha$.

Método do Ponto Fixo

A classe de métodos discutidos agora possuem uma extensão direta para problemas mais complexos (exemplo, sistemas de equações não-lineares).

O problema $f(x) = 0$ pode ser reescrito da forma:

$$\boxed{x = g(x)\,.}$$

Dada a equação acima, estamos procurando por um **ponto fixo**, isto é, um ponto α que satisfaz $g(\alpha) = \alpha$.

Problema: há várias maneiras de escrever $x = g(x)$ a partir de $f(x)$.

- $g(x) = x - f(x)$
- $g(x) = x + 2f(x)$
- $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ (se existir $f'(x)$ e $f'(x) \neq 0$)

Método do Ponto Fixo

Algoritmo

Dada uma função real $f(x)$. Escolha uma função $g(x)$ tal que

$$\boxed{f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = g(x)\,.}$$

Método do Ponto Fixo

Algoritmo

Dada uma função real $f(x)$. Escolha uma função $g(x)$ tal que

$$\boxed{f(x) = 0 \iff x = g(x)\,.}$$

Depois:

1. Comece por um **chute inicial** x_0;
2. Para $k = 0, 1, 2, \ldots$ faça

$$\boxed{x_{k+1} = g(x_k)\,,}$$

até que x_{k+1} satisfaça algum **critério de parada**.

Método do Ponto Fixo

Exemplo

Observação: existem **várias maneiras** de transformar $f(x) = 0$ em um problema de ponto fixo, mas nem todas são *boas* em termos de convergência.

Método do Ponto Fixo

Exemplo

Observação: existem **várias maneiras** de transformar $f(x) = 0$ em um problema de ponto fixo, mas nem todas são *boas* em termos de convergência.

Temos diferentes opções do Método do Ponto Fixo (MPF) para a função

$$f(x) = x\,e^{x} - 1\,, \quad x \in [0, 1]\,.$$

Método do Ponto Fixo

Exemplo

Observação: existem **várias maneiras** de transformar $f(x) = 0$ em um problema de ponto fixo, mas nem todas são *boas* em termos de convergência.

Temos diferentes opções do Método do Ponto Fixo (MPF) para a função

$$f(x) = x\,e^x - 1\,, \quad x \in [0,1]\,.$$

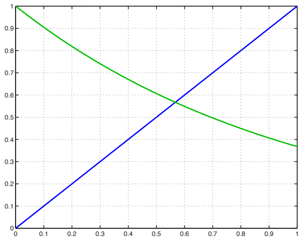
Algumas opções:

1. $g_1(x) = e^{-x}$;
2. $g_2(x) = (1+x)/(1+e^x)$;
3. $g_3(x) = x + 1 - x\,e^x$.

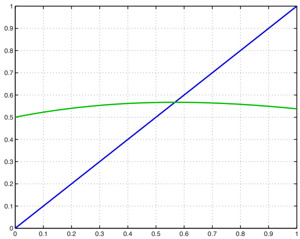
Método do Ponto Fixo

Exemplo

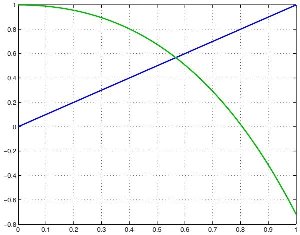
raízes de $f(x) \iff$ interseção de $g(x)$ com a reta $r(x) = x$



$r(x) \cap g_1(x)$



$r(x) \cap g_2(x)$



$r(x) \cap g_3(x)$

Método do Ponto Fixo

Exemplo

k	$x_{k+1} = g_1(x_k)$	$x_{k+1} = g_2(x_k)$	$x_{k+1} = g_3(x_k)$
0	0.500000000000000	0.500000000000000	0.500000000000000
1	0.606530659712633	0.566311003197218	0.675639364649936
2	0.545239211892605	0.567143165034862	0.347812678511202
3	0.579703094878068	0.567143290409781	0.855321409174107
4	0.560064627938902	0.567143290409784	−0.156505955383169
5	0.571172148977215	0.567143290409784	0.977326422747719
6	0.564862946980323	0.567143290409784	−0.619764251895580
7	0.568438047570066	0.567143290409784	0.713713087416146
8	0.566409452746921	0.567143290409784	0.256626649129847
9	0.567559634262242	0.567143290409784	0.924920676910549
10	0.566907212935471	0.567143290409784	−0.407422405542253

Método do Ponto Fixo

Exemplo

k	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	0.106530659712633	0.066311003197218	0.175639364649936
1	0.061291447820028	0.000832161837644	0.327826686138734
2	0.034463882985463	0.000000125374919	0.507508730662905
3	0.019638466939166	0.000000000000003	1.011827364557277
4	0.011107521038313	0.000000000000000	1.133832378130888
5	0.006309201996892	0.000000000000000	1.597090674643299
6	0.003575100589743	0.000000000000000	1.333477339311727
7	0.002028594823145	0.000000000000000	0.457086438286299
8	0.001150181515322	0.000000000000000	0.668294027780702
9	0.000652421326771	0.000000000000000	1.332343082452802
10	0.000369983035307	0.000000000000000	1.271083825749792

Algumas Questões sobre o Método do Ponto Fixo

Suponha que de alguma forma determinamos uma função $g \in \mathcal{C}([a, b])$. Vamos considerar a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo MPF $x_{k+1} = g(x_k)$.

Obviamente algumas questões surgem:

Algumas Questões sobre o Método do Ponto Fixo

Suponha que de alguma forma determinamos uma função $g \in \mathcal{C}([a,b])$. Vamos considerar a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo MPF $x_{k+1} = g(x_k)$.

Obviamente algumas questões surgem:

1. Existe algum ponto fixo α em $[a,b]$?

Algumas Questões sobre o Método do Ponto Fixo

Suponha que de alguma forma determinamos uma função $g \in \mathcal{C}([a, b])$. Vamos considerar a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo MPF $x_{k+1} = g(x_k)$.

Obviamente algumas questões surgem:

1. Existe algum ponto fixo α em $[a, b]$?
2. Se sim, ele é único?

Algumas Questões sobre o Método do Ponto Fixo

Suponha que de alguma forma determinamos uma função $g \in \mathcal{C}([a,b])$. Vamos considerar a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo MPF $x_{k+1} = g(x_k)$.

Obviamente algumas questões surgem:

1. Existe algum ponto fixo α em $[a,b]$?
2. Se sim, ele é único?
3. A sequência converge para algum α?

Algumas Questões sobre o Método do Ponto Fixo

Suponha que de alguma forma determinamos uma função $g \in \mathcal{C}([a,b])$. Vamos considerar a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo MPF $x_{k+1} = g(x_k)$.

Obviamente algumas questões surgem:

1. Existe algum ponto fixo α em $[a,b]$?
2. Se sim, ele é único?
3. A sequência converge para algum α?
4. Se sim, quão rápida é a convergência?

Algumas Questões sobre o Método do Ponto Fixo

Suponha que de alguma forma determinamos uma função $g \in \mathcal{C}([a, b])$. Vamos considerar a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo MPF $x_{k+1} = g(x_k)$.

Obviamente algumas questões surgem:

1. Existe algum ponto fixo α em $[a, b]$?
2. Se sim, ele é único?
3. A sequência converge para algum α?
4. Se sim, quão rápida é a convergência?
5. Se não, significa que não existe ponto fixo?

Teorema do Ponto Fixo

Teorema (ponto fixo)

Considere o MPF $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$.

1. *Se* $g \in \mathcal{C}([a,b])$ *e* $g(x) \in [a,b]$ *para todo* $x \in [a,b]$, *então existe um ponto fixo* $\alpha \in [a,b]$ *de* $g(x)$.
2. *Se, adicionalmente, a derivada* $g'(x)$ *existir e se houver uma constate* $\rho < 1$, *tal que*
$$|g'(x)| \leq \rho \qquad \forall\, x \in (a,b)\,,$$
então o ponto fixo α *é único.*

Teorema do Ponto Fixo

Teorema (ponto fixo)

Considere o MPF $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$.

1. *Se* $g \in \mathcal{C}([a,b])$ *e* $g(x) \in [a,b]$ *para todo* $x \in [a,b]$, *então existe um ponto fixo* $\alpha \in [a,b]$ *de* $g(x)$.

2. *Se, adicionalmente, a derivada* $g'(x)$ *existir e se houver uma constate* $\rho < 1$, *tal que*
$$|g'(x)| \leq \rho \qquad \forall\, x \in (a,b)\,,$$
então o ponto fixo α *é único.*

Demonstração: veja livro de Burden & Faires (Seção 2.2).

Isso responde as questões 1 e 2.

Método do Ponto Fixo

Convergência

3. A sequência gerada pelo MPF $x_{k+1} = g(x_k)$ converge para o ponto fixo α?

$$|x_{k+1} - \alpha| = |g(x_k) - g(\alpha)|$$

Método do Ponto Fixo

Convergência

3. A sequência gerada pelo MPF $x_{k+1} = g(x_k)$ converge para o ponto fixo α?

$$|x_{k+1} - \alpha| = |g(x_k) - g(\alpha)| \underset{\text{TVM}}{=} |g'(\xi)| \cdot |x_k - \alpha|$$

Método do Ponto Fixo

Convergência

3. A sequência gerada pelo MPF $x_{k+1} = g(x_k)$ converge para o ponto fixo α?

$$|x_{k+1} - \alpha| = |g(x_k) - g(\alpha)| \underset{\text{TVM}}{=} |g'(\xi)| \cdot |x_k - \alpha| \leq \rho\, |x_k - \alpha|\,,$$

com $\xi \in (x_k, \alpha)$.

Método do Ponto Fixo

Convergência

3. A sequência gerada pelo MPF $x_{k+1} = g(x_k)$ converge para o ponto fixo α?

$$|x_{k+1} - \alpha| = |g(x_k) - g(\alpha)| \underset{\text{TVM}}{=} |g'(\xi)| \cdot |x_k - \alpha| \leq \rho\,|x_k - \alpha|\,,$$

com $\xi \in (x_k, \alpha)$.

Isto é uma **contração** se a constante $\rho < 1$. Assim,

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \rho\,|x_k - \alpha| \leq \rho^2\,|x_{k-1} - \alpha| \leq \cdots \leq \rho^k\,|x_0 - \alpha|$$

Método do Ponto Fixo
Convergência

3. A sequência gerada pelo MPF $x_{k+1} = g(x_k)$ converge para o ponto fixo α?

$$|x_{k+1} - \alpha| = |g(x_k) - g(\alpha)| \underset{\text{TVM}}{=} |g'(\xi)| \cdot |x_k - \alpha| \leq \rho\, |x_k - \alpha|\,,$$

com $\xi \in (x_k, \alpha)$.

Isto é uma **contração** se a constante $\rho < 1$. Assim,

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \rho\, |x_k - \alpha| \leq \rho^2\, |x_{k-1} - \alpha| \leq \cdots \leq \rho^k\, |x_0 - \alpha|$$

Se $\rho < 1$, então $\rho^k \to 0$ quando $k \to \infty$.

Portanto, convergência.

Teorema do Ponto Fixo *Revisitado*

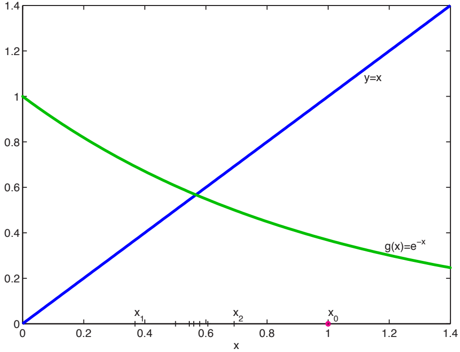
Teorema (ponto fixo)

Considere o MPF $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$.

1. *Se* $g \in \mathcal{C}([a,b])$ *e* $g(x) \in [a,b]$ *para todo* $x \in [a,b]$, *então existe um ponto fixo* $\alpha \in [a,b]$ *de* $g(x)$.
2. *Se, adicionalmente, a derivada* $g'(x)$ *existir e se houver uma constate* $\rho < 1$, *tal que*
$$|g'(x)| \leq \rho \qquad \forall\, x \in (a,b)\,,$$
então o ponto fixo α *é único e a sequência gerada pelo MPF converge para* α *independentemente da escolha do chute inicial* $x_0 \in [a,b]$.

Método do Ponto Fixo

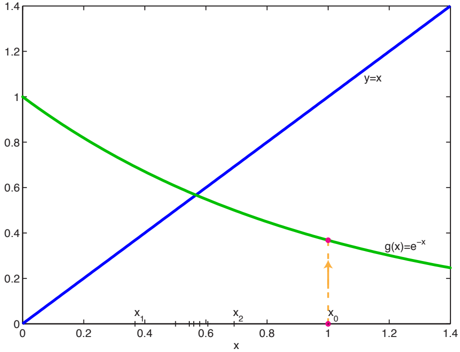
Interpretação Geométrica



x_0: comece com x_0 no eixo x;

Método do Ponto Fixo

Interpretação Geométrica

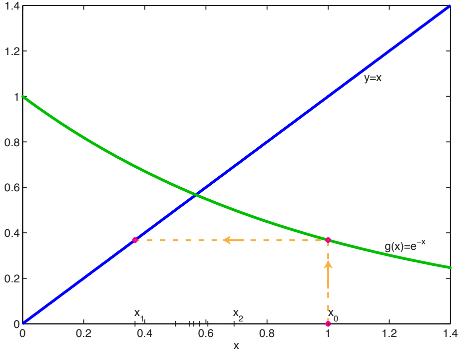


x_0: comece com x_0 no eixo x;

$g(x_0)$: vá paralelamente ao eixo y até o gráfico de $g(x)$;

Método do Ponto Fixo

Interpretação Geométrica



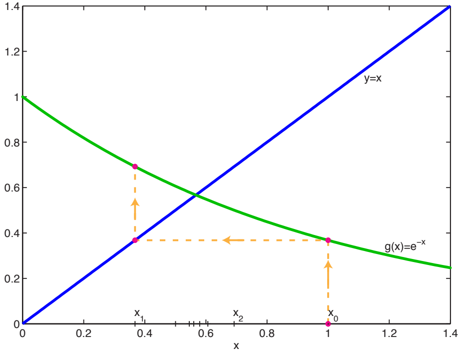
x_0: comece com x_0 no eixo x;

$g(x_0)$: vá paralelamente ao eixo y até o gráfico de $g(x)$;

$x_1 = g(x_0)$: vá paralelamente ao eixo x até a reta $y = x$;

Método do Ponto Fixo

Interpretação Geométrica



$$x_0: \text{ comece com } x_0 \text{ no eixo } x;$$

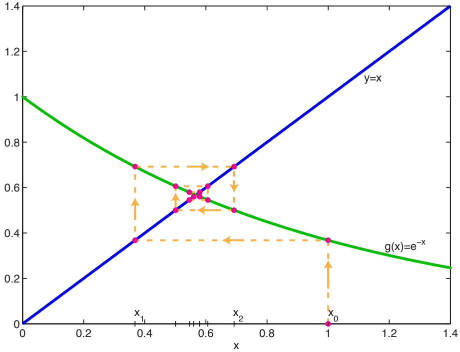
$$g(x_0): \text{ vá paralelamente ao eixo } y \text{ até o gráfico de } g(x);$$

$$x_1 = g(x_0): \text{ vá paralelamente ao eixo } x \text{ até a reta } y = x;$$

$$g(x_1): \text{ vá paralelamente ao eixo } y \text{ até o gráfico de } g(x);$$

Método do Ponto Fixo

Interpretação Geométrica



x_0: comece com x_0 no eixo x;

$g(x_0)$: vá paralelamente ao eixo y até o gráfico de $g(x)$;

$x_1 = g(x_0)$: vá paralelamente ao eixo x até a reta $y = x$;

$g(x_1)$: vá paralelamente ao eixo y até o gráfico de $g(x)$;

$\cdots$ assim por diante.

Método do Ponto Fixo

Taxa de Convergência

Suponha que α é um ponto fixo do processo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ com $\rho = |g'(\alpha)|$ e $0 < \rho < 1$.

Método do Ponto Fixo

Taxa de Convergência

Suponha que α é um ponto fixo do processo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ com $\rho = |g'(\alpha)|$ e $0 < \rho < 1$.

Se x_0 é suficientemente perto de α $\underset{\textbf{Taylor}}{\Longrightarrow}$ $x_k - \alpha \approx g'(\alpha)(x_{k-1} - \alpha)$.

Método do Ponto Fixo

Taxa de Convergência

Suponha que α é um ponto fixo do processo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ com $\rho = |g'(\alpha)|$ e $0 < \rho < 1$.

Se x_0 é suficientemente perto de $\alpha \underset{\textbf{Taylor}}{\Longrightarrow} x_k - \alpha \approx g'(\alpha)(x_{k-1} - \alpha)$.

Logo,

$$|x_k - \alpha| \approx \rho\,|x_{k-1} - \alpha| \approx \rho^2\,|x_{k-2} - \alpha| \approx \cdots \approx \rho^k\,|x_0 - \alpha|$$

Método do Ponto Fixo

Taxa de Convergência

Suponha que α é um ponto fixo do processo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ com $\rho = |g'(\alpha)|$ e $0 < \rho < 1$.

Se x_0 é suficientemente perto de $\alpha \underset{\textbf{Taylor}}{\Longrightarrow} x_k - \alpha \approx g'(\alpha)(x_{k-1} - \alpha)$.

Logo,

$$|x_k - \alpha| \approx \rho\,|x_{k-1} - \alpha| \approx \rho^2\,|x_{k-2} - \alpha| \approx \cdots \approx \rho^k\,|x_0 - \alpha|$$

Para quantificar a velocidade da convergência em termos de ρ, quantas iterações levariam para reduzir o erro por um fator fixo de 10, por exemplo?

Método do Ponto Fixo

Taxa de Convergência

Suponha que α é um ponto fixo do processo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ com $\rho = |g'(\alpha)|$ e $0 < \rho < 1$.

Se x_0 é suficientemente perto de $\alpha \underset{\textbf{Taylor}}{\Longrightarrow} x_k - \alpha \approx g'(\alpha)(x_{k-1} - \alpha)$.

Logo,

$$|x_k - \alpha| \approx \rho\,|x_{k-1} - \alpha| \approx \rho^2\,|x_{k-2} - \alpha| \approx \cdots \approx \rho^k\,|x_0 - \alpha|$$

Para quantificar a velocidade da convergência em termos de ρ, quantas iterações levariam para reduzir o erro por um fator fixo de 10, por exemplo?

$$|x_k - \alpha| \approx 0.1\,|x_0 - \alpha| \;\Rightarrow\; \rho^k \approx 10^{-1} \;\Rightarrow\; k\log(\rho) \approx -1$$

Método do Ponto Fixo

Taxa de Convergência

Definição (taxa de convergência)

A taxa de convergência é definida como $\text{taxa} = -\log(\rho)$.

Método do Ponto Fixo

Taxa de Convergência

Definição (taxa de convergência)

A taxa de convergência é definida como $\text{taxa} = -\log(\rho)$.

- menor o valor de $\rho \iff$ maior é a taxa (velocidade) de convergência;

Método do Ponto Fixo

Taxa de Convergência

Definição (taxa de convergência)

A taxa de convergência é definida como $\text{taxa} = -\log(\rho)$.

- menor o valor de $\rho \Leftrightarrow$ maior é a taxa (velocidade) de convergência;
- precisamos de $k = \lceil 1/\text{taxa} \rceil$ **iterações** para reduzir o erro em uma ordem de magnitude;

Método do Ponto Fixo

Exemplo

Exemplo 1

Seja $f(x) = x^2 + x - 6$, sabemos que $\alpha = 2$ é uma raiz de $f(x)$. O MPF converge para qual processo iterativo abaixo:

1. $g_1(x) = 6 - x^2$
2. $g_2(x) = \sqrt{6 - x}$.

Método do Ponto Fixo

Exemplo

Exemplo 1

Seja $f(x) = x^2 + x - 6$, sabemos que $\alpha = 2$ é uma raiz de $f(x)$. O MPF converge para qual processo iterativo abaixo:

1. $g_1(x) = 6 - x^2$
2. $g_2(x) = \sqrt{6-x}$.

Solução:

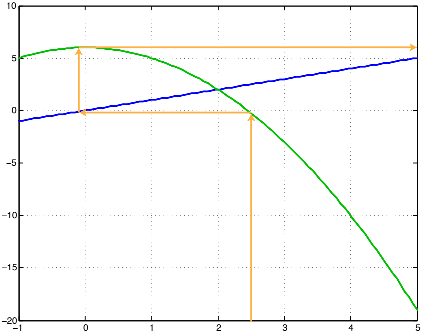
1. $g_1'(x) = -2x \;\Rightarrow\; \rho = |g_1'(\alpha)| = 4 > 1 \;\Rightarrow\;$ não converge.
2. $g_2'(x) = -1/(2\sqrt{6-x}) \;\Rightarrow\; \rho = |g_2'(\alpha)| = {}^1/_4 < 1 \;\Rightarrow\;$ converge.

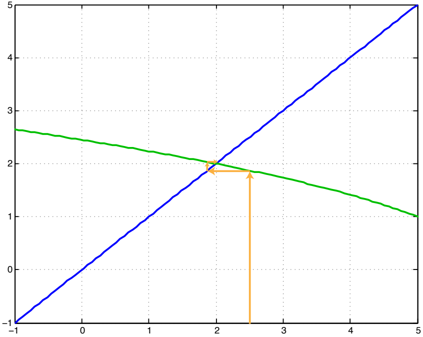
Além disso, o processo (2) leva $k = \lceil 1/(-\log(0.25)) \rceil = 1$ iteração para reduzir o erro em uma ordem de magnitude.

Método do Ponto Fixo

Exemplo

Solução (continuação):





$$x_{k+1} = g_1(x_k) \quad \text{e} \quad x_0 = 2.5$$

$$x_{k+1} = g_2(x_k) \quad \text{e} \quad x_0 = 2.5$$

Método de Newton

- Seja $f(x)$, função que buscamos uma raiz α, **diferenciável**;

Método de Newton

- Seja $f(x)$, função que buscamos uma raiz α, **diferenciável**;
- Na prática, a derivada $f'(x)$ deve ser *barata* de ser calculada, isso em comparação com $f(x)$;

Método de Newton

- Seja $f(x)$, função que buscamos uma raiz α, **diferenciável**;
- Na prática, a derivada $f'(x)$ deve ser *barata* de ser calculada, isso em comparação com $f(x)$;
- No **Método de Newton**, a função $f(x)$ é linearizada em torno de $x_k \approx \alpha$.

Método de Newton

- Seja $f(x)$, função que buscamos uma raiz α, **diferenciável**;
- Na prática, a derivada $f'(x)$ deve ser *barata* de ser calculada, isso em comparação com $f(x)$;
- No **Método de Newton**, a função $f(x)$ é linearizada em torno de $x_k \approx \alpha$.

Pela **Fórmula de Taylor**, temos que

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

Método de Newton

- Seja $f(x)$, função que buscamos uma raiz α, **diferenciável**;
- Na prática, a derivada $f'(x)$ deve ser *barata* de ser calculada, isso em comparação com $f(x)$;
- No **Método de Newton**, a função $f(x)$ é linearizada em torno de $x_k \approx \alpha$.

Pela **Fórmula de Taylor**, temos que

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

Tomando $x = \alpha$ e pelo fato de que $f(\alpha) = 0$, segue que

$$\alpha \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Método de Newton

Dessa forma o Método de Newton é definido através do seguinte processo iterativo:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots}$$

Método de Newton

Dessa forma o Método de Newton é definido através do seguinte processo iterativo:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots}$$

- O Método de Newton é um **MPF** com

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Note que, $\alpha = g(\alpha)$.

Método de Newton

Algoritmo

Dada uma função real diferenciável $f(x)$.

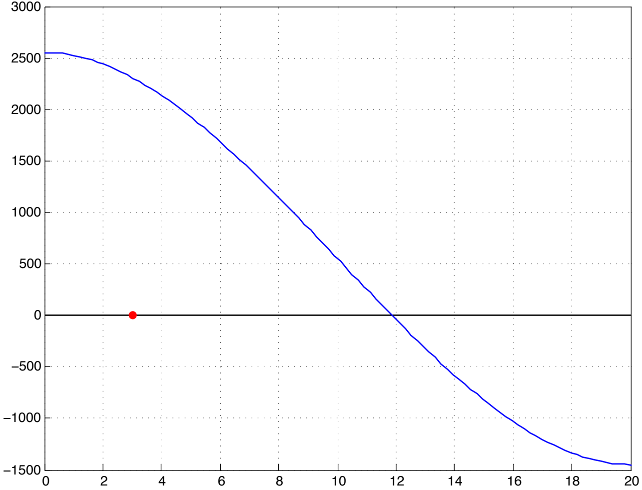
1. Comece por um **chute inicial** x_0;
2. Para $k = 0, 1, 2, \ldots$ faça

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},}$$

até que x_{k+1} satisfaça algum **critério de parada**.

Método de Newton

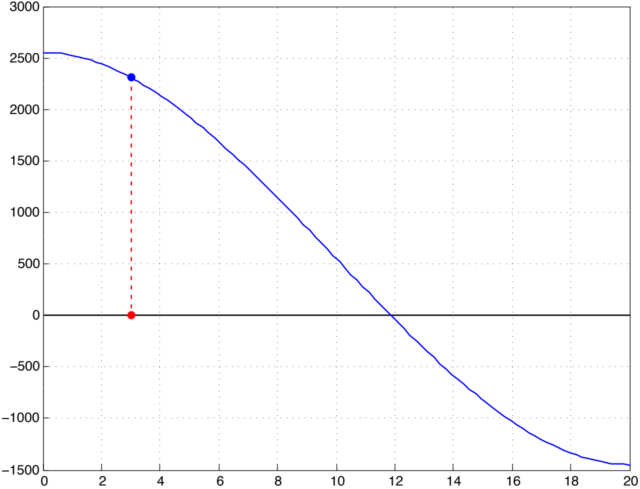
Interpretação Geométrica



$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552\,, \quad x \in [0, 20]$$

Método de Newton

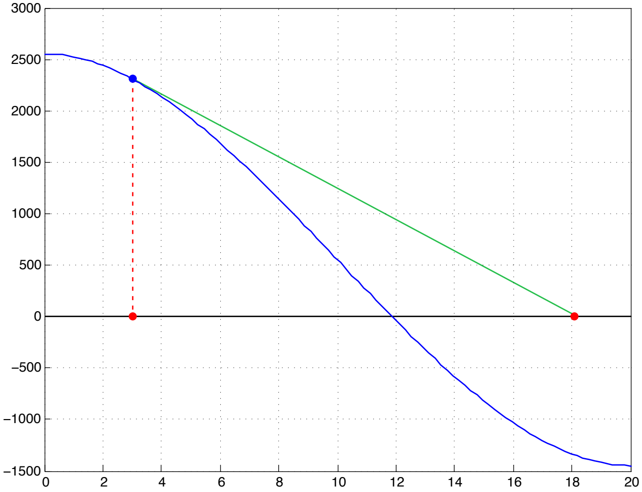
Interpretação Geométrica



$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552\,, \quad x \in [0, 20]$$

Método de Newton

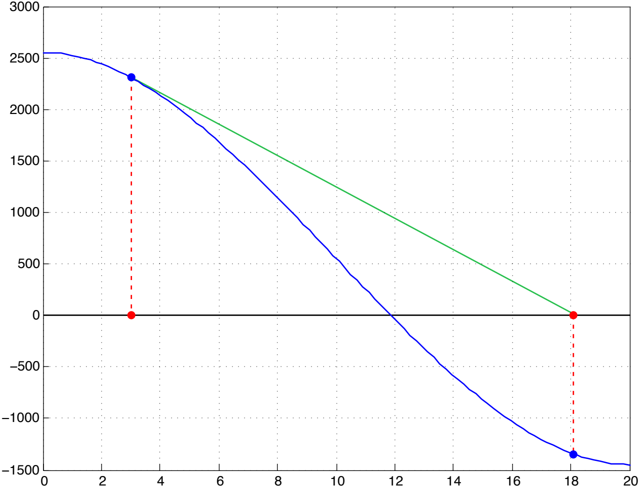
Interpretação Geométrica



$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552\,, \quad x \in [0, 20]$$

Método de Newton

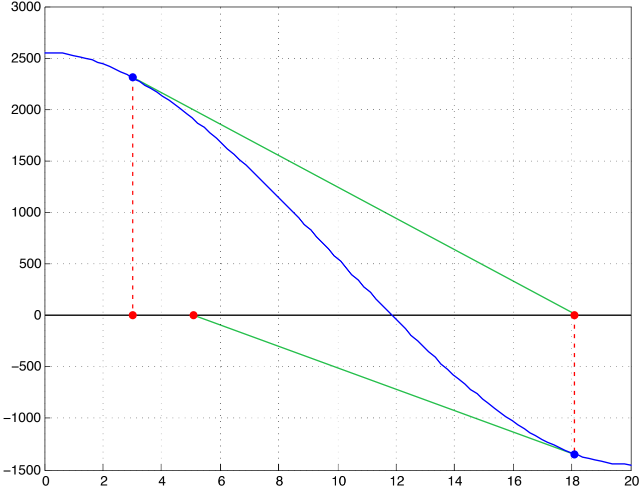
Interpretação Geométrica



$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552\,, \quad x \in [0, 20]$$

Método de Newton

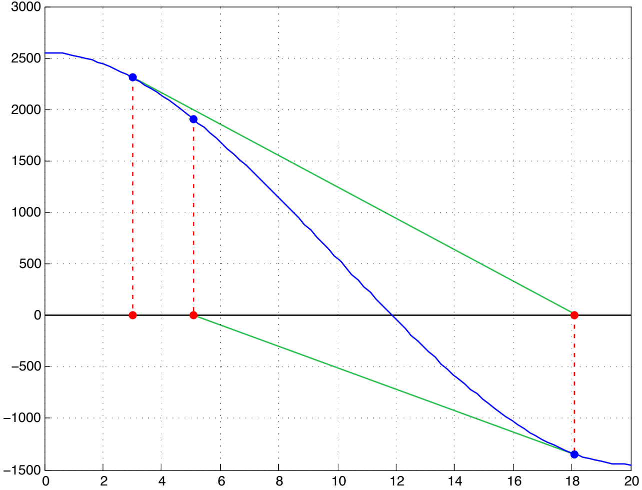
Interpretação Geométrica



$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552\,, \quad x \in [0, 20]$$

Método de Newton

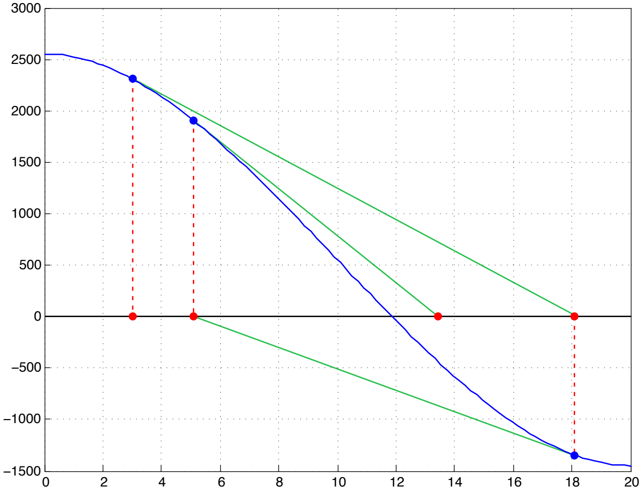
Interpretação Geométrica



$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552\,, \quad x \in [0,20]$$

Método de Newton

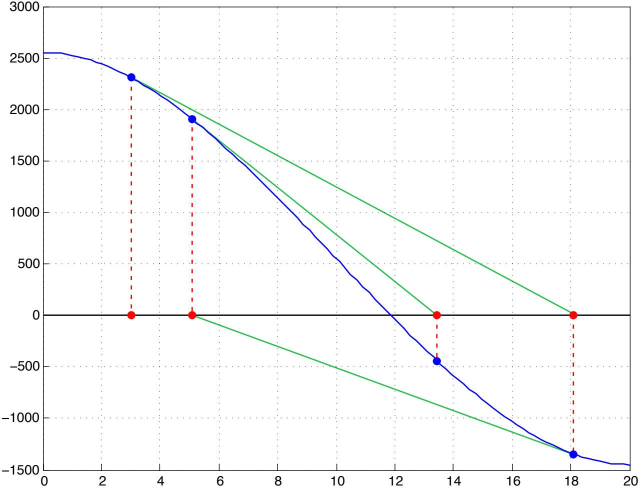
Interpretação Geométrica



$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552\,, \quad x \in [0, 20]$$

Método de Newton

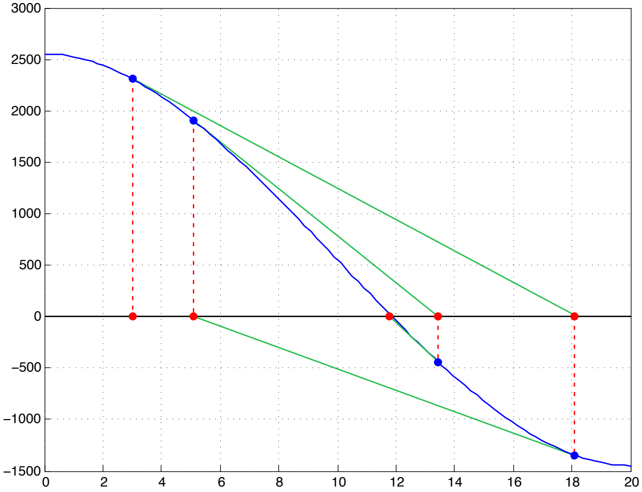
Interpretação Geométrica



$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552\,, \quad x \in [0, 20]$$

Método de Newton

Interpretação Geométrica



$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 2552\,, \quad x \in [0, 20]$$

Método de Newton

MATLAB

```
function [x,k] = newton(func,dfunc,x,tol,kmax)
% dfunc: derivada da funcao func(x)
% x: chute inicial x0

for k=1:kmax
    dx = func(x)/dfunc(x);
    x = x - dx;
    if (abs(dx) < tol)
        return;
    end
end
x= NaN;
```

Método de Newton

Sempre funciona?

Considere a função: $f(x) = x^3 - 5x$.

Método de Newton

Sempre funciona?

Considere a função: $f(x) = x^3 - 5x$.

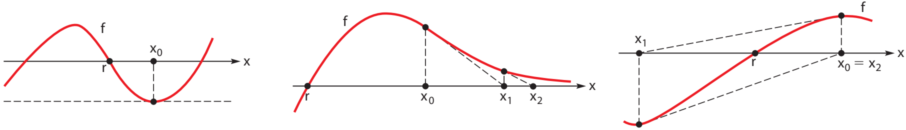
```
>> f = @(x) (x^3-5*x);
>> df = @(x) (3*x^2-5);
>> raiz = newton(f,df,1,1e-3,100)
```

Método de Newton

Sempre funciona?

Considere a função: $f(x) = x^3 - 5x$.

```
>> f = @(x) (x^3-5*x);
>> df = @(x) (3*x^2-5);
>> raiz = newton(f,df,1,1e-3,100)
```



Depende de uma **boa** escolha de x_0!!!

Método de Newton

Exemplo

Exemplo 2

Seja $f(x) = x^2 + x - 6$, sabemos que $\alpha = 2$ é uma raiz de $f(x)$. Use o Método de Newton com $x_0 = 5.5$ e precisão de $\varepsilon = 10^{-16}$. Compare o resultado com o Método do Ponto Fixo, $x_{k+1} = \sqrt{6 - x_k}$, do Exemplo 1.

Método de Newton

Exemplo

Exemplo 2

Seja $f(x) = x^2 + x - 6$, sabemos que $\alpha = 2$ é uma raiz de $f(x)$. Use o Método de Newton com $x_0 = 5.5$ e precisão de $\varepsilon = 10^{-16}$. Compare o resultado com o Método do Ponto Fixo, $x_{k+1} = \sqrt{6 - x_k}$, do Exemplo 1.

Solução:

Assim, o Método de Newton é dado por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \;\Rightarrow\; x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 + x_k - 6}{2x_k + 1}$$

Método de Newton

Exemplo

Solução (continuação): valores de x_k

k	Newton	MPF
0	5.500000000000000	5.500000000000000
1	3.020833333333333	0.707106781186548
2	2.147990631163708	2.300628874636987
3	2.004135442673868	1.923374931042571
4	2.000003414728656	2.019065394918508
5	2.000000000002332	1.995227958174577
6	2.000000000000000	2.001192654849958
7	—	1.999701814058797
8	—	2.000074545096058
9	—	1.999981363639157
10	—	2.000004659084784

Método de Newton

Exemplo

Solução (continuação): erro absoluto $|x_k - x_{k-1}|$

k	Newton	MPF
1	2.479166666666667	4.792893218813452
2	0.872842702169625	1.593522093450440
3	0.143855188489840	0.377253943594417
4	0.004132027945212	0.023837436743931
5	0.000003414726324	0.005964696675381
6	0.000000000002332	0.001490840791161
7	0.000000000000000	0.000372731037262
8	—	0.000093181456901
9	—	0.000023295445627
10	—	0.000005823856319

Método de Newton

Propriedades

$(+)$ Simples e fácil de implementar;

$(+)$ Generalização para sistemas de equações é trivial;

$(+)$ Convergência rápida $\Rightarrow$ quantidade de dígitos significativos precisos duplica (pelo menos) a cada iteração;

$(-)$ Requer o cálculo de $f'(x)$ que pode ser computacionalmente caro;

$(-)$ A função $f(x)$ pode não ser diferenciável.

Método da Secante

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Método da Secante

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

O **Método da Secante** é obtido aproximando a derivada do Método de Newton por **diferenças finitas**:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Método da Secante

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots}$$

O **Método da Secante** é obtido aproximando a derivada do Método de Newton por **diferenças finitas**:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Propriedades:

(+) Não requer o cálculo de derivadas;

(−) Precisa de dois chutes inicias x_0 e x_1;

(−) A convergência não é tão rápida quanto o Método de Newton.

Método da Secante

MATLAB

```
function [x,k] = secante(func,x0,x1,tol,kmax)

f0 = func(x0);
for k=1:kmax
    f1 = func(x1);
    ds = f1*(x1-x0)/(f1-f0);
    x0 = x1;
    x1 = x1 - ds;
    if(abs(ds)<tol)
        x=x1;
        return;
    end
    f0=f1;
end
x = NaN;
```

Método da Secante

Exemplo

Exemplo 4

Use o Método da Secante no Exemplo 2 com $x_0 = 5$ e $x_1 = 5.5$.

Solução: valores de x_k

k	Newton	Secante
0	5.500000000000000	5.500000000000000
1	3.020833333333333	2.913043478260870
2	2.147990631163708	2.339491916859123
3	2.004135442673868	2.049575230050266
4	2.000003414728656	2.003123061824930
5	2.000000000002332	2.000030642341871
6	2.000000000000000	2.000000019127521
7	—	2.000000000000117
8	—	2.000000000000000

Ordem de Convergência

Definição (ordem de convergência)

Seja $\{x_k\}$ uma sequência obtida por um método iterativo tal que $x_k \to x$, com $x \neq x_k$, $\forall k$. Se existirem um número $p \geq 1$ e uma constante $c > 0$ tais que:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|^p} = c\,,$$

então p **é a ordem de convergência** *desse método.*

Ordem de Convergência

Definição (ordem de convergência)

Seja $\{x_k\}$ *uma sequência obtida por um método iterativo tal que* $x_k \to x$, *com* $x \neq x_k$, $\forall k$. *Se existirem um número* $p \geq 1$ *e uma constante* $c > 0$ *tais que:*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|^p} = c\,,$$

então p **é a ordem de convergência** *desse método.*

Casos particulares (maior o valor de $p \implies$ convergência mais rápida):

1. Se $p = 1$ (e $c < 1$), o método possui convergência **linear**;
2. Se $p = 2$, o método possui convergência **quadrática**;
3. Se $p \approx 1.6$, o método possui convergência **super linear**.

Ordem de Convergência

Teorema (de Ostrowski)

Se α é um ponto fixo de $g \in \mathcal{C}^1$ em uma vizinhança de α. Se $\rho = |g'(\alpha)| < 1$, então existe $\delta > 0$ tal que $x_k \to \alpha$, $\forall x_0 \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Além disso, o MPF converge para α com ordem 1 e

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \rho\,.$$

Corolário

Assumindo todas as hipóteses do teorema anterior. Além disso, se $g \in \mathcal{C}^2$ em uma vizinhança de α, com $g'(\alpha) = 0$ e $g''(\alpha) \neq 0$. Então o MPF converge para α com ordem 2 e

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = \frac{1}{2}\, g''(\alpha)\,.$$

Ordem de Convergência

Se o Método de Newton convergir então qual é a sua ordem?

Ordem de Convergência

Se o Método de Newton convergir então qual é a sua ordem?

- $g'(\alpha) = 0$

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \underset{\substack{f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)\neq 0}}{\Longrightarrow} g'(\alpha) = 0$$

Ordem de Convergência

Se o Método de Newton convergir então qual é a sua ordem?

- $g'(\alpha) = 0$

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \underset{\substack{f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)\neq 0}}{\Longrightarrow} g'(\alpha) = 0$$

- $g''(\alpha) \neq 0$

$$g''(x) = \frac{[f(x)f''(x)]'[f'(x)]^2 - [2f'(x)f''(x)]f(x)f''(x)}{[f'(x)]^4} \underset{\substack{f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)\neq 0}}{\Longrightarrow} g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

Ordem de Convergência

Se o Método de Newton convergir então qual é a sua ordem?

- $g'(\alpha) = 0$

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \underset{\substack{f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)\neq 0}}{\Longrightarrow} g'(\alpha) = 0$$

- $g''(\alpha) \neq 0$

$$g''(x) = \frac{[f(x)f''(x)]'[f'(x)]^2 - [2f'(x)f''(x)]f(x)f''(x)}{[f'(x)]^4} \underset{\substack{f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)\neq 0}}{\Longrightarrow} g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

$$g''(\alpha) \neq 0 \iff f''(\alpha) \neq 0$$

Ordem de Convergência

Se o Método de Newton convergir então qual é a sua ordem?

- $g'(\alpha) = 0$

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \underset{\substack{f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)\neq 0}}{\Longrightarrow} g'(\alpha) = 0$$

- $g''(\alpha) \neq 0$

$$g''(x) = \frac{[f(x)f''(x)]'[f'(x)]^2 - [2f'(x)f''(x)]f(x)f''(x)}{[f'(x)]^4} \underset{\substack{f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)\neq 0}}{\Longrightarrow} g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

$$g''(\alpha) \neq 0 \iff f''(\alpha) \neq 0$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^2} = \frac{1}{2} g''(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Ordem de Convergência

Podemos reescrever o Corolário do Teorema de Ostrowski da seguinte maneira:

Teorema (convergência do Método de Newton)

Se $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ *e existir* $\alpha \in [a,b]$, *tal que* $f(\alpha) = 0$ *e* $f'(\alpha) \neq 0$, *então existe* $\delta > 0$ *tal que a sequência* $\{x_k\}$ *gerada pelo Método de Newton converge* **quadraticamente** *para* α, $\forall x_0 \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$.

Teorema (convergência do Método da Secante)

Se $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ *e existir* $\alpha \in [a,b]$, *tal que* $f(\alpha) = 0$ *e* $f'(\alpha) \neq 0$, *então existe* $\delta > 0$ *tal que a sequência* $\{x_k\}$ *gerada pelo Método da Secante converge* **super linearmente** *para* α, $\forall x_0, x_1 \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$.

Ordem de Convergência

Estimativa de p

Lembrando que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|^{p}} = c\,.$$

Ordem de Convergência

Estimativa de p

Lembrando que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|^{p}} = c\,.$$

Para k suficientemente grande, temos:

$$|x_{k+1} - x| \approx c\,|x_k - x|^p \quad \text{e} \quad |x_k - x| \approx c\,|x_{k-1} - x|^p$$

Ordem de Convergência

Estimativa de p

Lembrando que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|^{p}} = c\,.$$

Para k suficientemente grande, temos:

$$|x_{k+1} - x| \approx c\,|x_k - x|^p \quad \text{e} \quad |x_k - x| \approx c\,|x_{k-1} - x|^p$$

Dividindo lado a lado:

$$\frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|} \approx \left(\frac{|x_k - x|}{|x_{k-1} - x|}\right)^p$$

Ordem de Convergência

Estimativa de p

Lembrando que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|^{p}} = c\,.$$

Para k suficientemente grande, temos:

$$|x_{k+1} - x| \approx c\,|x_k - x|^p \quad \text{e} \quad |x_k - x| \approx c\,|x_{k-1} - x|^p$$

Dividindo lado a lado:

$$\frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|} \approx \left(\frac{|x_k - x|}{|x_{k-1} - x|}\right)^p$$

Aplicando o logaritmo em os membros da equação acima:

$$\boxed{p \approx \frac{\log(|x_{k+1} - x|/|x_k - x|)}{\log(|x_k - x|/|x_{k-1} - x|)}}$$

Ordem de Convergência

Exemplo

Exemplo 3

Calcule a ordem de convergência p do Exemplo 2.

Solução: ordem de convergência p

k	Newton	MPF
1	1.567370450941532	0.937063706635487
2	1.852478858806326	1.017628378638283
3	1.984386665179866	0.995723553475921
4	1.999776965605183	1.001077063925155
5	—	0.999731234273812
6	—	1.000067222645084
7	—	0.999983196293817
8	—	1.000004201013382

Outras Raízes

Se encontramos uma raiz α de $f(x)$ e desejamos encontrar uma outra raiz. Como fazer isso sem recalcular α novamente?

Outras Raízes

Se encontramos uma raiz α de $f(x)$ e desejamos encontrar uma outra raiz. Como fazer isso sem recalcular α novamente?

Fazendo uma **deflação explícita** da raiz podemos definir uma nova função:

$$\boxed{f_1(x) = \frac{f(x)}{x-\alpha},}$$

Agora basta aplicar o método de sua escolha em $f_1(x)$.

Outras Raízes

Se encontramos uma raiz α de $f(x)$ e desejamos encontrar uma outra raiz. Como fazer isso sem recalcular α novamente?

Fazendo uma **deflação explícita** da raiz podemos definir uma nova função:

$$\boxed{f_1(x) = \frac{f(x)}{x-\alpha}\,,}$$

Agora basta aplicar o método de sua escolha em $f_1(x)$.

Analogamente, podemos fazer um procedimento semelhante para outras raízes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Outras Raízes

Usando a inversa da correção de Newton $f(x)/f'(x)$ em $f_1(x)$ temos:

Outras Raízes

Usando a inversa da correção de Newton $f(x)/f'(x)$ em $f_1(x)$ temos:

$$\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = \frac{\frac{f'(x)}{x-\alpha} - \frac{f(x)}{(x-\alpha)^2}}{\frac{f(x)}{x-\alpha}} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x-\alpha}$$

Outras Raízes

Usando a inversa da correção de Newton $f(x)/f'(x)$ em $f_1(x)$ temos:

$$\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = \frac{\frac{f'(x)}{x-\alpha} - \frac{f(x)}{(x-\alpha)^2}}{\frac{f(x)}{x-\alpha}} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x-\alpha}$$

Logo, o Método de Newton pode ser reescrito da forma

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{1}{\frac{f'(x_k)}{f(x_k)} - \frac{1}{x_k-\alpha}}}$$

Outras Raízes

Usando a inversa da correção de Newton $f(x)/f'(x)$ em $f_1(x)$ temos:

$$\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = \frac{\frac{f'(x)}{x-\alpha} - \frac{f(x)}{(x-\alpha)^2}}{\frac{f(x)}{x-\alpha}} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x-\alpha}$$

Logo, o Método de Newton pode ser reescrito da forma

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{1}{\frac{f'(x_k)}{f(x_k)} - \frac{1}{x_k-\alpha}}}$$

- O processo acima é chamado de **deflação implícita**;
- A função $f(x)$ não é modificada;
- Podemos repetir o processo acima para as raízes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Raízes Múltiplas

Definição (raiz de multiplicidade m)

Uma raiz α de f é uma **raiz de multiplicidade** m*, se para todo $x \neq \alpha$ podemos escrever f como $f(x) = (x - \alpha)^m q(x)$, onde $q(\alpha) \neq 0$.*

Raízes Múltiplas

Definição (raiz de multiplicidade m)

Uma raiz α de f é uma **raiz de multiplicidade m**, *se para todo $x \neq \alpha$ podemos escrever f como $f(x) = (x-\alpha)^m q(x)$, onde $q(\alpha) \neq 0$.*

O Método de Newton é um MPF com $g(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Raízes Múltiplas

Definição (raiz de multiplicidade m)

Uma raiz α de f é uma **raiz de multiplicidade** m*, se para todo $x \neq \alpha$ podemos escrever f como $f(x) = (x - \alpha)^m q(x)$, onde $q(\alpha) \neq 0$.*

O Método de Newton é um MPF com $g(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Se α é uma raiz de multiplicidade $m > 1$ então (verifique):

$$\boxed{g'(\alpha) = \frac{m-1}{m} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \frac{m-1}{m}.}$$

Raízes Múltiplas

Definição (raiz de multiplicidade m)

Uma raiz α de f é uma **raiz de multiplicidade m**, *se para todo $x \neq \alpha$ podemos escrever f como $f(x) = (x-\alpha)^m q(x)$, onde $q(\alpha) \neq 0$.*

O Método de Newton é um MPF com $g(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Se α é uma raiz de multiplicidade $m > 1$ então (verifique):

$$\boxed{g'(\alpha) = \frac{m-1}{m} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|} = \frac{m-1}{m}\,.}$$

Logo, o Método de Newton irá convergir **linearmente** para α com

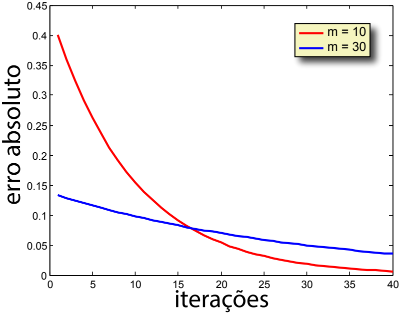
$$\rho = \frac{m-1}{m}\,.$$

Raízes Múltiplas

Considere a função $f(x) = (x-1)^m$, com $m > 1$. Analisando o erro do Método de Newton para $m = 10$ e 30, temos:

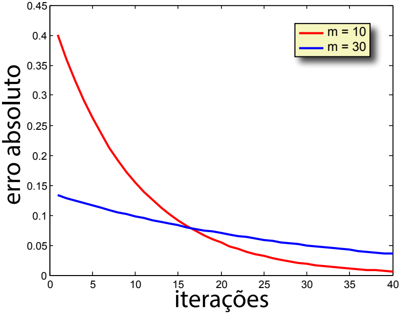
Raízes Múltiplas

Considere a função $f(x) = (x-1)^m$, com $m > 1$. Analisando o erro do Método de Newton para $m = 10$ e 30, temos:



Raízes Múltiplas

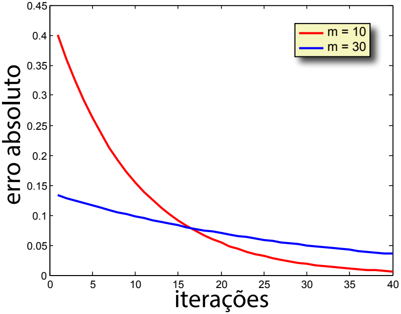
Considere a função $f(x) = (x-1)^m$, com $m > 1$. Analisando o erro do Método de Newton para $m = 10$ e 30, temos:



Nesse caso, teremos $\text{taxa}_{10} = 0.1054$ e $\text{taxa}_{30} = 0.0339$.

Raízes Múltiplas

Considere a função $f(x) = (x-1)^m$, com $m > 1$. Analisando o erro do Método de Newton para $m = 10$ e 30, temos:



Nesse caso, teremos $\text{taxa}_{10} = 0.1054$ e $\text{taxa}_{30} = 0.0339$.

Quanto maior o valor de $m \Rightarrow$ mais o Método de Newton se deteriora!

Raízes Múltiplas

Como melhorar a ordem de convergência quando α é uma raiz de multiplicidade m de $f(x)$?

Raízes Múltiplas

Como melhorar a ordem de convergência quando α é uma raiz de multiplicidade m de $f(x)$?

$$f(x) = (x-\alpha)^m q(x) \implies \phi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = (x-\alpha)\frac{q(x)}{mq(x) + (x-\alpha)q'(x)}$$

Raízes Múltiplas

Como melhorar a ordem de convergência quando α é uma raiz de multiplicidade m de $f(x)$?

$$f(x) = (x-\alpha)^m q(x) \implies \phi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = (x-\alpha)\frac{q(x)}{mq(x) + (x-\alpha)q'(x)}$$

Note que $\phi(\alpha) = 0$, pelo fato de $q(\alpha) \neq 0$ segue que

$$\frac{q(\alpha)}{mq(\alpha) + (\alpha-\alpha)q'(\alpha)} = \frac{1}{m} \neq 0\,.$$

Raízes Múltiplas

Como melhorar a ordem de convergência quando α é uma raiz de multiplicidade m de $f(x)$?

$$f(x) = (x-\alpha)^m q(x) \implies \phi(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = (x-\alpha)\frac{q(x)}{mq(x) + (x-\alpha)q'(x)}$$

Note que $\phi(\alpha) = 0$, pelo fato de $q(\alpha) \neq 0$ segue que

$$\frac{q(\alpha)}{mq(\alpha) + (\alpha-\alpha)q'(\alpha)} = \frac{1}{m} \neq 0\,.$$

Portanto, α é uma raiz simples de $\phi(x)$. Obtemos o **Método de Newton Modificado**, simplesmente aplicando o Método de Newton em $\phi(x)$:

$$g(x) = x - \frac{\phi(x)}{\phi'(x)} = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f''(x)f(x)}$$

Zero de Funções no MATLAB

O MATLAB usa uma variação do Método da Secante e implementa um método para zero de funções não-lineares através do seguinte comando:

```
raiz = fzero(fun,x0)
% fun:  função não-linear
% x0:  chute inicial
```

Zero de Funções no MATLAB

O MATLAB usa uma variação do Método da Secante e implementa um método para zero de funções não-lineares através do seguinte comando:

```
raiz = fzero(fun,x0)
% fun:  função não-linear
% x0:  chute inicial
```

Teste o comando:

```
>> f = @(x) (x^3-30*x+2552);
>> raiz = fzero(f,3)
```

Sistemas Não-Lineares

Desejamos resolver um sistema de n equações não-lineares e n incógnitas:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) & = & 0 \end{cases}$$

Sistemas Não-Lineares

Desejamos resolver um sistema de n equações não-lineares e n incógnitas:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & 0 \end{array}\right.}$$

Na forma vetorial:

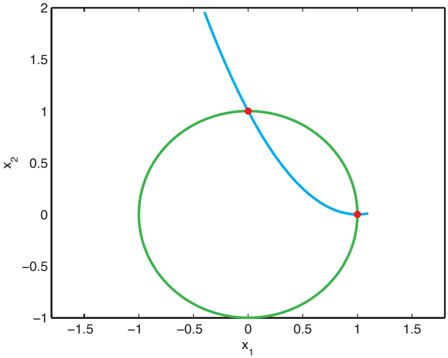
$$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{0}}}$$

com $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))^\top$ e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$.

Sistemas Não-Lineares

Exemplo: interseção de parábola e círculo

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 = 0 \qquad \text{(parábola)}$$
$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \qquad \text{(círculo)}$$



Raízes: $(1, 0)^\top$ e $(0, 1)^\top$.

Série de Taylor

Teorema (série de Taylor para funções vetoriais)

Suponha que $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *seja suficientemente diferenciável. Logo, para um vetor direção* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\top$*, a expansão de Taylor para cada função* f_i *em cada coordenada* x_j *vale*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + J(\mathbf{x})\mathbf{v} + \mathcal{O}(\|\mathbf{v}\|^2)\,,$$

onde $J(\mathbf{x})$ *é a matriz jacobiana:*

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Método de Newton

- Dado um chute inicial $\mathbf{x}_0$, vamos gerar uma sequência $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots\}$ onde $\mathbf{x}_{k+1}$ é obtido por $\mathbf{x}_k$ **linearizando** $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{0}}$;

Método de Newton

- Dado um chute inicial $\mathbf{x}_0$, vamos gerar uma sequência $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots\}$ onde $\mathbf{x}_{k+1}$ é obtido por $\mathbf{x}_k$ **linearizando** $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{0}}$;
- Seja $\alpha = \mathbf{x}_k + \mathbf{v}$, então para $\mathbf{v}$ suficientemente pequeno temos:

$$\bar{0} = \mathbf{f}(\alpha) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + \mathbf{v}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + J(\mathbf{x}_k)\mathbf{v}\,;$$

Método de Newton

- Dado um chute inicial $\mathbf{x}_0$, vamos gerar uma sequência $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots\}$ onde $\mathbf{x}_{k+1}$ é obtido por $\mathbf{x}_k$ **linearizando** $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{0}}$;
- Seja $\alpha = \mathbf{x}_k + \mathbf{v}$, então para $\mathbf{v}$ suficientemente pequeno temos:

$$\bar{0} = \mathbf{f}(\alpha) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + \mathbf{v}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + J(\mathbf{x}_k)\mathbf{v}\,;$$

- Aproxime α por $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$, onde $\mathbf{v}_k$ é solução do sistema linear

$$\boxed{J(\mathbf{x}_k)\mathbf{v}_k = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)}$$

Método de Newton

- Dado um chute inicial $\mathbf{x}_0$, vamos gerar uma sequência $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots\}$ onde $\mathbf{x}_{k+1}$ é obtido por $\mathbf{x}_k$ **linearizando** $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{0}}$;
- Seja $\alpha = \mathbf{x}_k + \mathbf{v}$, então para $\mathbf{v}$ suficientemente pequeno temos:

$$\bar{0} = \mathbf{f}(\alpha) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + \mathbf{v}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + J(\mathbf{x}_k)\mathbf{v}\,;$$

- Aproxime α por $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$, onde $\mathbf{v}_k$ é solução do sistema linear

$$\boxed{J(\mathbf{x}_k)\mathbf{v}_k = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)}$$

- Note que o Método de Newton é um MPF

$$\boxed{\mathbf{x}_{k+1} = g(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k - J^{-1}(\mathbf{x}_k)\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)}$$

Método de Newton

Algoritmo

Para $k = 0, 1, \ldots$ até convergir faça

Método de Newton

Algoritmo

Para $k = 0, 1, \ldots$ até convergir faça

1. Resolva $J(\mathbf{x}_k)\mathbf{v}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ para $\mathbf{v}_k$;

Método de Newton

Algoritmo

Para $k = 0, 1, \ldots$ até convergir faça

1. Resolva $J(\mathbf{x}_k)\mathbf{v}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ para $\mathbf{v}_k$;
2. Faça $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{v}_k$.

Método de Newton

Algoritmo

Para $k = 0, 1, \ldots$ até convergir faça

1. Resolva $J(\mathbf{x}_k)\mathbf{v}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ para $\mathbf{v}_k$;
2. Faça $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{v}_k$.

Observação: a cada iteração precisamos resolver um sistema linear o que pode ser **computacionalmente caro!**

Método da Newton para Sistemas

MATLAB

```
function [x,k] = newton_sis(F,Jac,x,tol,kmax)
% F: funcao vetorial
% Jac: Jacobiano de F
% x: chute inicial (vetor coluna)

if nargin == 4
    kmax = 1000;
end

for k=1:kmax
    v = Jac(x)\F(x);
    x = x - v;
    if norm(v) < tol
        return;
    end
end
```

Método da Newton

Exemplo

Exemplo: interseção de parábola e círculo

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 = 0 \qquad \text{(parábola)}$$
$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \qquad \text{(círculo)}$$

Lembrando que as raízes são: $(1, 0)^\top$ e $(0, 1)^\top$.

Método da Newton

Exemplo

Exemplo: interseção de parábola e círculo

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 = 0 \qquad \text{(parábola)}$$
$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \qquad \text{(círculo)}$$

Lembrando que as raízes são: $(1, 0)^\top$ e $(0, 1)^\top$.

$$F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))^\top$$

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 & -1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

Método da Newton

Exemplo

Exemplo: interseção de parábola e círculo

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 - x_2 + 1 = 0 \qquad \text{(parábola)}$$
$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \qquad \text{(círculo)}$$

Lembrando que as raízes são: $(1, 0)^\top$ e $(0, 1)^\top$.

$$F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))^\top$$

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 & -1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

k	$\mathbf{x}_k$	$\lVert\mathbf{v}_k\rVert$
0	$(1.0000, -1.0000)$	$\times$
1	$(1.5, 0.0000)$	1.1180
2	$(1.0833, -0.1667)$	0.4488
3	$(1.0154, -0.0044)$	0.1759
4	$(1.0001, -0.0002)$	0.0158
5	$(1.0000, -0.0000)$	2×10^{-4}