# Sistemas Lineares: Métodos Iterativos


Prof. Afonso Paiva

Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
USP – São Carlos


Métodos Numéricos e Computacionais I – SME0305


WARNING
usar somente quando os
métodos diretos possuírem
limitações computacionais

# Introdução

Seja $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ um sistema linear de ordem $n$, com $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

**Objetivo:** queremos definir um processo iterativo, tal que a sequência de vetores $\{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots\}$ produzida por esse processo **convirja** para a solução $\mathbf{x}$, independentemente da escolha do chute inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

# Introdução

Seja $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema linear de ordem $n$, com $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

**Objetivo:** queremos definir um processo iterativo, tal que a sequência de vetores $\{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots\}$ produzida por esse processo **convirja** para a solução $\mathbf{x}$, independentemente da escolha do chute inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

## Definição

*Uma sequência de vetores* $\{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots\}$ *converge para um vetor* $\mathbf{x}$, *se*

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| = 0\,.$$

*Notação:* $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}$.

# Introdução

**Ideia principal:** vamos criar um processo recursivo através de um sistema equivalente a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

# Introdução

**Ideia principal:** vamos criar um processo recursivo através de um sistema equivalente a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

1. Transformar $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ em um sistema equivalente da forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{g}\,,$$

em que $\mathbf{C} \in \mathcal{M}(n,n)$ e $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ são conhecidos.

# Introdução

**Ideia principal:** vamos criar um processo recursivo através de um sistema equivalente a $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

1. Transformar $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em um sistema equivalente da forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{g}\,,$$

   em que $\mathbf{C} \in \mathcal{M}(n,n)$ e $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ são conhecidos.

2. Dado um chute inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, obtemos uma sequência $\{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots\}$ através do processo iterativo:

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,.} \qquad (\star)$$

# Introdução

**Perguntas:**

- Dado $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é possível obter um sistema equivalente $\mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{g}$?

# Introdução

**Perguntas:**

- Dado $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é possível obter um sistema equivalente $\mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{g}$?
  - Sim. Por exemplo, basta tomar $\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$ e $\mathbf{g} = \mathbf{b}$.

# Introdução

**Perguntas:**

- Dado $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é possível obter um sistema equivalente $\mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{g}$?
  - Sim. Por exemplo, basta tomar $\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$ e $\mathbf{g} = \mathbf{b}$.

- Se $\mathbf{x}^{(k)} \to \bar{\mathbf{x}}$ então $\bar{\mathbf{x}}$ é solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$?

# Introdução

**Perguntas:**

- Dado $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é possível obter um sistema equivalente $\mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{g}$?
  - Sim. Por exemplo, basta tomar $\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$ e $\mathbf{g} = \mathbf{b}$.

- Se $\mathbf{x}^{(k)} \to \bar{\mathbf{x}}$ então $\bar{\mathbf{x}}$ é solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$?
  - Sim. Passando o limite em ambos lados da Equação ($\star$), temos que $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{g}$. Pela hipótese de equivalência, segue que $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$.

# Introdução

**Perguntas:**

- Dado $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é possível obter um sistema equivalente $\mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{g}$?
  - Sim. Por exemplo, basta tomar $\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$ e $\mathbf{g} = \mathbf{b}$.

- Se $\mathbf{x}^{(k)} \to \bar{\mathbf{x}}$ então $\bar{\mathbf{x}}$ é solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$?
  - Sim. Passando o limite em ambos lados da Equação $(\star)$, temos que $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{g}$. Pela hipótese de equivalência, segue que $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$.

- Quando $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}$?

# Introdução

**Perguntas:**

- Dado $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ é possível obter um sistema equivalente $\mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{g}$?
  - Sim. Por exemplo, basta tomar $\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$ e $\mathbf{g} = \mathbf{b}$.
- Se $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}$ então $\bar{\mathbf{x}}$ é solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$?
  - Sim. Passando o limite em ambos lados da Equação ($\star$), temos que $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{g}$. Pela hipótese de equivalência, segue que $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$.
- Quando $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}$?
- Quando terminar o processo iterativo $\{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots\}$?

# Convergência

## Definição (raio espectral)

*O* **raio espectral** *de uma matriz* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ *é definido como*

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \{|\lambda_i|\},$$

*onde* $\lambda_i$ *são os autovalores de* $\mathbf{A}$.

# Convergência

## Definição (raio espectral)

*O* **raio espectral** *de uma matriz* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ *é definido como*

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \{|\lambda_i|\},$$

*onde* $\lambda_i$ *são os autovalores de* $\mathbf{A}$.

## Teorema (critério geral de convergência)

*Seja* $\{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots\}$ *sequência gerada pelo processo iterativo* $(\star)$.

1. *Se* $\|\mathbf{C}\|_M < 1$, *onde* $\|\cdot\|_M$ *é uma norma consistente, então a sequência converge.*
2. $\mathbf{x}^{(k)} \to \mathbf{x}$ *se somente se* $\rho(\mathbf{C}) < 1$.

# Critérios de Parada

Voltando a pergunta de quando devemos parar a sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$?

# Critérios de Parada

Voltando a pergunta de quando devemos parar a sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$?

Dados $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$, temos:

1. Erro absoluto:

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < \varepsilon\,;$$

# Critérios de Parada

Voltando a pergunta de quando devemos parar a sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$?

Dados $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$, temos:

1. Erro absoluto:
$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < \varepsilon\,;$$
2. Erro relativo:
$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k+1)}\|} < \varepsilon\,;$$

# Critérios de Parada

Voltando a pergunta de quando devemos parar a sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$?

Dados $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$, temos:

1. Erro absoluto:
$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < \varepsilon\,;$$
2. Erro relativo:
$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k+1)}\|} < \varepsilon\,;$$
3. Teste de resíduo:
$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}\| < \varepsilon\,;$$

# Critérios de Parada

Voltando a pergunta de quando devemos parar a sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$?

Dados $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$, temos:

1. Erro absoluto:
$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < \varepsilon\,;$$
2. Erro relativo:
$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k+1)}\|} < \varepsilon\,;$$
3. Teste de resíduo:
$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}\| < \varepsilon\,;$$
4. Número máximo de iterações:
$$k = k_{max}\,.$$

# Método de Gauss-Jacobi

Dado $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e supondo sem perda de generalidade que $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, temos:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

# Método de Gauss-Jacobi

Dado $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e supondo sem perda de generalidade que $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, temos:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

A forma como o Método de Gauss-Jacobi transforma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ em $\mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{g}$ é feita isolando cada coordenada $x_i$ do vetor $\mathbf{x}$ na $i$-ésima equação do sistema.

# Método de Gauss-Jacobi

Logo,

$$\left\{\begin{array}{lcc} x_1 & = & (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n)/a_{11} \\ x_2 & = & (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n)/a_{22} \\ x_3 & = & (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \cdots - a_{3n}x_n)/a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1})/a_{nn} \end{array}\right.$$

# Método de Gauss-Jacobi

Logo,

$$\begin{cases} x_1 &= & (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n)/a_{11} \\ x_2 &= & (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n)/a_{22} \\ x_3 &= & (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \cdots - a_{3n}x_n)/a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n &= & (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1})/a_{nn} \end{cases}$$

Desta forma temos o sistema equivalente $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{g}$, em que:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & \cdots & -a_{3n}/a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & -a_{n,n-1}/a_{nn} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

# Método de Gauss-Jacobi

Portanto, dado o chute inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, o processo iterativo é dado por:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = & (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} & = & (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} \\ x_3^{(k+1)} & = & (b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)})/a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{(k+1)} & = & (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})/a_{nn} \end{cases}$$

Desta forma temos o sistema equivalente $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$, em que:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & \cdots & -a_{3n}/a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & -a_{n,n-1}/a_{nn} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

# Método de Gauss-Jacobi

## Forma Matricial

Vamos mostrar como obter $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$ a partir de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Seja $\mathbf{D}$ uma matriz diagonal formada pela diagonal de $\mathbf{A}$. Assim,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{A} - \mathbf{D} + \mathbf{D})\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

# Método de Gauss-Jacobi

## Forma Matricial

Vamos mostrar como obter $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$ a partir de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Seja $\mathbf{D}$ uma matriz diagonal formada pela diagonal de $\mathbf{A}$. Assim,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{A} - \mathbf{D} + \mathbf{D})\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Dessa forma,

$$(\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{D} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

# Método de Gauss-Jacobi

## Forma Matricial

Vamos mostrar como obter $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$ a partir de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Seja $\mathbf{D}$ uma matriz diagonal formada pela diagonal de $\mathbf{A}$. Assim,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{A} - \mathbf{D} + \mathbf{D})\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Dessa forma,

$$(\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{D} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

Portanto,

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{\left(\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\right)}_{\mathbf{C}}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}} .}$$

# MATLAB – Método de Gauss-Jacobi

```
function [x,k]=gauss_jacobi(A,b,x0,tol)
n = size(A,1);
D = diag(diag(A));
C = eye(n)-D\A;
g = D\b;
kmax = 10000; k = 0;

while (norm(b-A*x0)>tol && k<kmax)
   k = k+1;
   x0 = C*x0+g;
end
if (k == kmax)
    disp('Erro: o metodo nao converge.');
    return;
end
x = x0;
```

# Método de Gauss-Jacobi

## Critérios de Convergência

O Método de Gauss-Jacobi **converge** para a solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, independentemente da escolha de $\mathbf{x}^{(0)}$, se satisfazer um dos critérios:

# Método de Gauss-Jacobi

## Critérios de Convergência

O Método de Gauss-Jacobi **converge** para a solução de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, independentemente da escolha de $\mathbf{x}^{(0)}$, se satisfazer um dos critérios:

1. Critério das linhas:

$$\alpha = \max_{1 \le k \le n} \{\alpha_k\} < 1 \,, \quad \text{com} \quad \alpha_k = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|}{|a_{kk}|}$$

# Método de Gauss-Jacobi

## Critérios de Convergência

O Método de Gauss-Jacobi **converge** para a solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, independentemente da escolha de $\mathbf{x}^{(0)}$, se satisfazer um dos critérios:

1. Critério das linhas:

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \{\alpha_k\} < 1\,, \quad \text{com} \quad \alpha_k = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|}{|a_{kk}|}$$

2. Critério das colunas:

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \{\alpha_k\} < 1\,, \quad \text{com} \quad \alpha_k = \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |a_{ik}|}{|a_{kk}|}$$

# Método de Gauss-Jacobi

## Critérios de Convergência

**Observações:**

- Uma matriz que satisfaz o critério das linhas é dita **estritamente diagonal dominante**;

# Método de Gauss-Jacobi

## Critérios de Convergência

**Observações:**

- Uma matriz que satisfaz o critério das linhas é dita **estritamente diagonal dominante**;
- Quanto menor o valor de $\alpha$, mais rápida será a convergência.

# Método de Gauss-Jacobi

## Exercício 1

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 - x_3 & = & 8 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 & = & -4 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 & = & 12 \end{cases}.$$

1. Determine o Método de Gauss-Jacobi para resolver o sistema acima;
2. O Método de Gauss-Jacobi converge?
3. Dado o chute inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^\top$, calcule $\mathbf{x}^{(1)}$.

# Método de Gauss-Jacobi

## Exercício 2

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 & = & -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 3 \\ 6x_2 + 8x_3 & = & -6 \end{cases}.$$

Teria como usar o Método de Gauss-Jacobi para resolver o sistema acima analisando a convergência do método?

# Método de Gauss-Seidel

Como acelerar a convergência do Método de Gauss-Jacobi?

- No cálculo de $x_i^{(k+1)}$ usar os valores atualizados $x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}$ e os valores restantes $x_{i+1}^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$.

# Método de Gauss-Seidel

Como acelerar a convergência do Método de Gauss-Jacobi?

- No cálculo de $x_i^{(k+1)}$ usar os valores atualizados $x_1^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}$ e os valores restantes $x_{i+1}^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$.

$$\left\{\begin{array}{ccc}
x_1^{(k+1)} & = & (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\
x_2^{(k+1)} & = & (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} \\
x_3^{(k+1)} & = & (b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)})/a_{33} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_n^{(k+1)} & = & (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn}
\end{array}\right.$$

# Método de Gauss-Seidel

## Forma Matricial

Vamos mostrar como obter $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$ a partir de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Considere $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{R}$, em que $\mathbf{L}$ é a matriz triangular inferior de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{R}$ é a matriz triangular superior de $\mathbf{A}$ sem a diagonal. Assim,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{L} + \mathbf{R})\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

# Método de Gauss-Seidel

## Forma Matricial

Vamos mostrar como obter $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$ a partir de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Considere $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{R}$, em que $\mathbf{L}$ é a matriz triangular inferior de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{R}$ é a matriz triangular superior de $\mathbf{A}$ sem a diagonal. Assim,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{L} + \mathbf{R})\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Dessa forma,

$$\mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{R}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{R}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

# Método de Gauss-Seidel

## Forma Matricial

Vamos mostrar como obter $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$ a partir de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Considere $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{R}$, em que $\mathbf{L}$ é a matriz triangular inferior de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{R}$ é a matriz triangular superior de $\mathbf{A}$ sem a diagonal. Assim,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{L} + \mathbf{R})\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Dessa forma,

$$\mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{R}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{R}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

Portanto,

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{\left(-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\right)}_{\mathbf{C}}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}}\,.}$$

# MATLAB – Método de Gauss-Seidel

```
function [x,k]=gauss_seidel(A,b,x0,tol)
L = tril(A); R = triu(A,1);
C = -L\R;
g = L\b;
kmax = 10000; k = 0;

while (norm(b-A*x0)>tol && k<kmax)
   k = k+1;
   x0 = C*x0+g;
end
if (k == kmax)
    disp('Erro: o metodo nao converge.');
    return;
end
x = x0;
```

# Método de Gauss-Seidel

## Critério de Sassenfeld

O Método de Gauss-Seidel **converge** para a solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, independentemente da escolha de $\mathbf{x}^{(0)}$, se satisfazer:

$$\boxed{\beta = \max_{1 \le i \le n} \{\beta_i\} < 1\,, \quad \text{com}}$$

$$\boxed{\beta_1 = \frac{\sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|}{|a_{11}|} \quad \text{e} \quad \beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}}$$

**Obs.:** quanto menor o valor de $\beta$, mais rápida será a convergência.

# Método de Gauss-Seidel

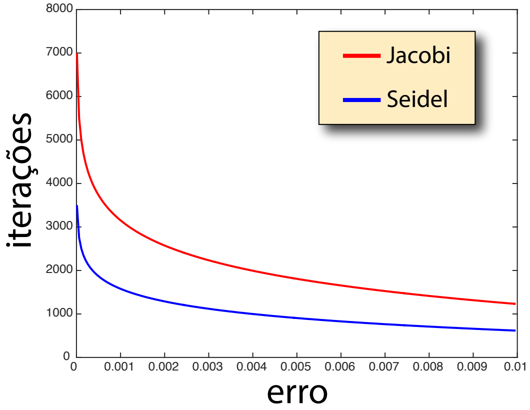
## Exercício 3

Considere o sistema linear:

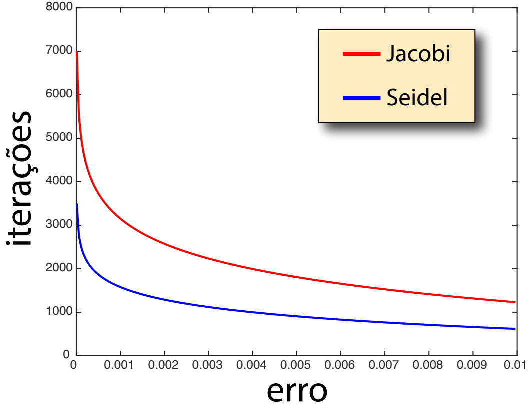
$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 + 0.1x_3 & = & 0.2 \\ 0.3x_1 + 2x_2 + 0.2x_3 & = & 0.7 \\ -0.5x_1 + x_2 + 7x_3 & = & 1 \end{cases}.$$

1. O Método de Gauss-Seidel converge?
2. Dado o chute inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^\top$, calcule $\mathbf{x}^{(1)}$.

# Gauss-Jacobi × Gauss-Seidel



# Gauss-Jacobi × Gauss-Seidel

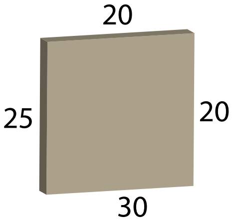



- Método de Gauss-Seidel converge mais **rápido**;
- Método de Gauss-Jacobi é **paralelizável**.

# Aplicação

## Distribuição de Temperatura

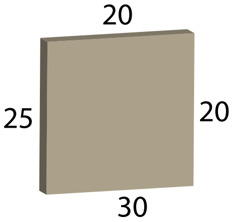
**Problema:** dada uma placa $\mathcal{R}$ sujeita a 3 temperaturas (em Celsius) distintas na fronteira $\partial\mathcal{R}$, como calcular a temperatura de equilíbrio no interior da placa?



# Aplicação

## Distribuição de Temperatura

**Problema:** dada uma placa $\mathcal{R}$ sujeita a 3 temperaturas (em Celsius) distintas na fronteira $\partial\mathcal{R}$, como calcular a temperatura de equilíbrio no interior da placa?

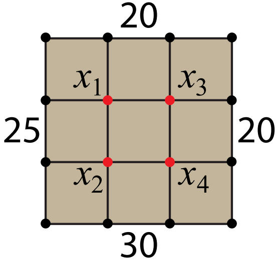



**Propriedade do Valor Médio:** a temperatura de equilíbrio em um ponto $P$ é o valor médio da temperatura de sua vizinhança.

# Aplicação

## Distribuição de Temperatura

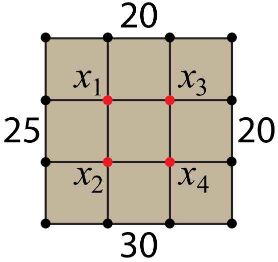
Suponha que $\mathcal{R}$ já alcançou a temperatura de equilíbrio. Vamos discretizar $\mathcal{R}$ por uma grade (*grid*):



# Aplicação

## Distribuição de Temperatura

Suponha que $\mathcal{R}$ já alcançou a temperatura de equilíbrio. Vamos discretizar $\mathcal{R}$ por uma grade (*grid*):

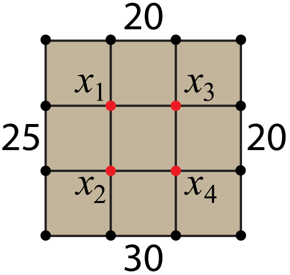



**Propriedade do Valor Médio:** a temperatura em um ponto $P \notin \partial\mathcal{R}$ é o valor médio da temperatura dos seus 4 pontos mais próximos.

# Aplicação

## Distribuição de Temperatura

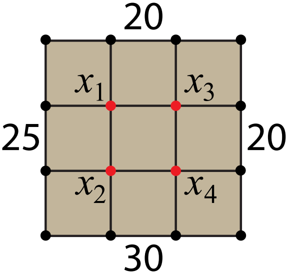
Qual o valor da temperatura em $x_1$, $x_2$, $x_3$ e $x_4$?



# Aplicação

## Distribuição de Temperatura

Qual o valor da temperatura em $x_1$, $x_2$, $x_3$ e $x_4$?




$$x_1 = \frac{20 + 25 + x_2 + x_3}{4}$$

$$x_2 = \frac{x_1 + 25 + 30 + x_4}{4}$$

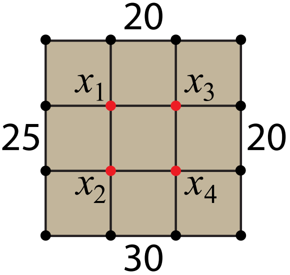
$$x_3 = \frac{20 + x_1 + x_4 + 20}{4}$$

$$x_4 = \frac{x_3 + x_2 + 30 + 20}{4}$$

# Aplicação

## Distribuição de Temperatura

Qual o valor da temperatura em $x_1$, $x_2$, $x_3$ e $x_4$?




$$x_1 = \frac{20 + 25 + x_2 + x_3}{4}$$

$$x_2 = \frac{x_1 + 25 + 30 + x_4}{4}$$

$$x_3 = \frac{20 + x_1 + x_4 + 20}{4}$$

$$x_4 = \frac{x_3 + x_2 + 30 + 20}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 55 \\ 40 \\ 50 \end{bmatrix}$$

# Aplicação

## Distribuição de Temperatura

### Exercício 4

Dada uma placa quadrada de lados $[0,1] \times [0,1]$ metros, já com os valores de temperatura prescritos na fronteira. Faça uma função em MATLAB que calcule e visualize a distribuição de temperaturas nesta placa usando o Método de Gauss-Seidel e um grid de resolução $n \times n$. **Obs.:** use os comandos *drawnow* (em cada iteração) e *pcolor* para visualizar a evolução do resultado final.

`pcolor(X,Y,C)`: desenha pseudo-cores;

`% X,Y`: coordenadas de uma malha estruturada;

`% C`: campo escalar;

# Formas Quadráticas

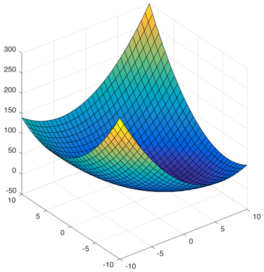
Sejam $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$. Uma **forma quadrática** é uma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ escrita da seguinte maneira:

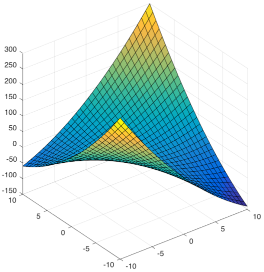
$$\boxed{F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{b} + c\,,}$$

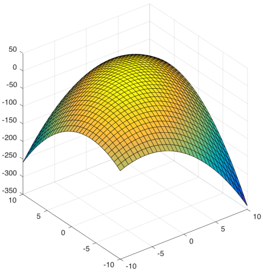
# Formas Quadráticas

Sejam $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$. Uma **forma quadrática** é uma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ escrita da seguinte maneira:

$$\boxed{F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{b} + c\,,}$$



# Formas Quadráticas

## Proposição

*Se* $\mathbf{A}$ *é SPD então* $F(\mathbf{x})$ *é* **minimizada** *pela solução de* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

# Formas Quadráticas

## Proposição

*Se* $\mathbf{A}$ *é SPD então* $F(\mathbf{x})$ *é* **minimizada** *pela solução de* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

**Esboço da prova:**

1. Mostrar que $\mathbf{x}$ é ponto de crítico, isto é,

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \bar{\mathbf{0}} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \,.$$

2. Mostrar que $\mathbf{x}$ é ponto de crítico. A matriz **Hessiana**

$$\mathbf{H} = \left[ \frac{\partial^2 F(\mathbf{x})}{\partial x_i x_j} \right] = \mathbf{A} \,,$$

como $\mathbf{A}$ é SPD $\Rightarrow$ $\mathbf{x}$ é ponto de mínimo.

# Método dos Gradientes

**Entrada:** $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, com $\mathbf{A}$ SPD.

# Método dos Gradientes

**Entrada:** $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com $\mathbf{A}$ SPD.

**Objetivo:** construir um processo iterativo (sequência) $\mathbf{x}^{(k)}$ que aproxime $\mathbf{x}$.

# Método dos Gradientes

**Entrada:** $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com $\mathbf{A}$ SPD.

**Objetivo:** construir um processo iterativo (sequência) $\mathbf{x}^{(k)}$ que aproxime $\mathbf{x}$.

**Ideia:** vamos "descer" o parabolóide no sentido contrário de $\nabla F(\mathbf{x})$, isto é,

$$-\nabla F(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} = \underbrace{\mathbf{r}^{(k)}}_{\textbf{resíduo}}$$

# Método dos Gradientes

**Entrada:** $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com $\mathbf{A}$ SPD.

**Objetivo:** construir um processo iterativo (sequência) $\mathbf{x}^{(k)}$ que aproxime $\mathbf{x}$.

**Ideia:** vamos "descer" o parabolóide no sentido contrário de $\nabla F(\mathbf{x})$, isto é,

$$-\nabla F(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} = \underbrace{\mathbf{r}^{(k)}}_{\textbf{resíduo}}$$

Dado um chute inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, obtemos $\mathbf{x}^{(1)}$ da seguinte forma

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \alpha \nabla F(\mathbf{x}^{(0)}) = \underbrace{\mathbf{x}^{(0)} + \alpha \mathbf{r}^{(0)}}_{\text{reta}}$$

# Método dos Gradientes

**Entrada:** $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com $\mathbf{A}$ SPD.

**Objetivo:** construir um processo iterativo (sequência) $\mathbf{x}^{(k)}$ que aproxime $\mathbf{x}$.

**Ideia:** vamos "descer" o parabolóide no sentido contrário de $\nabla F(\mathbf{x})$, isto é,

$$-\nabla F(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} = \underbrace{\mathbf{r}^{(k)}}_{\textbf{resíduo}}$$

Dado um chute inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, obtemos $\mathbf{x}^{(1)}$ da seguinte forma

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \alpha \nabla F(\mathbf{x}^{(0)}) = \underbrace{\mathbf{x}^{(0)} + \alpha \mathbf{r}^{(0)}}_{\text{reta}}$$

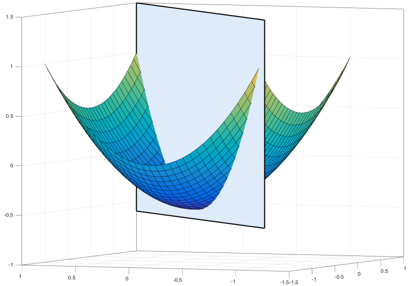
**Vamos "caminhar" nessa reta, mas qual o tamanho do passo $\alpha$???**

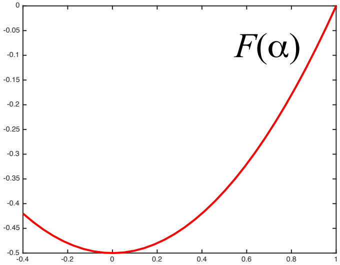
# Método dos Gradientes

**Resposta:** o valor de $\alpha$ tem que minimizar $F(\mathbf{x})$ ao longo da reta $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha\mathbf{r}^{(0)}$, ou seja, **minimizar** $F(\mathbf{x}^{(1)})$. Logo,

# Método dos Gradientes

**Resposta:** o valor de $\alpha$ tem que minimizar $F(\mathbf{x})$ ao longo da reta $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha\mathbf{r}^{(0)}$, ou seja, **minimizar** $F(\mathbf{x}^{(1)})$. Logo,






$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\mathbf{x}^{(1)}) \underbrace{=}_{\textbf{r. cadeia}} \nabla F(\mathbf{x}^{(1)}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^{(1)}}{\partial \alpha} = \underbrace{\nabla F(\mathbf{x}^{(1)})}_{-\mathbf{r}^{(1)}} \cdot \mathbf{r}^{(0)} = 0$$

# Método dos Gradientes

Portanto, $\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(0)} = 0$ (ortogonais). Segue que,

# Método dos Gradientes

Portanto, $\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(0)} = 0$ (ortogonais). Segue que,

$$0 = \mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(0)} = \left[\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)}\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)}$$

# Método dos Gradientes

Portanto, $\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(0)} = 0$ (ortogonais). Segue que,

$$
\begin{aligned}
0 = \mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(0)} &= \left[\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)}\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)} \\
&= \left[\mathbf{b} - \mathbf{A}\left(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha \mathbf{r}^{(0)}\right)\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)}
\end{aligned}
$$

# Método dos Gradientes

Portanto, $\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(0)} = 0$ (ortogonais). Segue que,

$$\begin{aligned}
0 = \mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(0)} &= \left[\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)}\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)} \\
&= \left[\mathbf{b} - \mathbf{A}\left(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha\mathbf{r}^{(0)}\right)\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)} \\
&= \left[\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}\right) - \alpha\mathbf{A}\mathbf{r}^{(0)}\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)}
\end{aligned}$$

# Método dos Gradientes

Portanto, $\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(0)} = 0$ (ortogonais). Segue que,

$$
\begin{aligned}
0 = \mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(0)} &= \left[\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)}\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)} \\
&= \left[\mathbf{b} - \mathbf{A}\left(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha\mathbf{r}^{(0)}\right)\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)} \\
&= \left[\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}\right) - \alpha\mathbf{A}\mathbf{r}^{(0)}\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)} \\
&= \left[\mathbf{r}^{(0)} - \alpha\mathbf{A}\mathbf{r}^{(0)}\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)}
\end{aligned}
$$

# Método dos Gradientes

Portanto, $\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(0)} = 0$ (ortogonais). Segue que,

$$\begin{aligned}
0 = \mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(0)} &= \left[\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)}\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)} \\
&= \left[\mathbf{b} - \mathbf{A}\big(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha \mathbf{r}^{(0)}\big)\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)} \\
&= \left[\big(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}\big) - \alpha \mathbf{A}\mathbf{r}^{(0)}\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)} \\
&= \left[\mathbf{r}^{(0)} - \alpha \mathbf{A}\mathbf{r}^{(0)}\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)} \\
&= \mathbf{r}^{(0)} \cdot \mathbf{r}^{(0)} - \alpha\big(\mathbf{r}^{(0)} \cdot \mathbf{A}\mathbf{r}^{(0)}\big)
\end{aligned}$$

# Método dos Gradientes

Portanto, $\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(0)} = 0$ (ortogonais). Segue que,

$$
\begin{aligned}
0 = \mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(0)} &= \left[\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)}\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)} \\
&= \left[\mathbf{b} - \mathbf{A}\left(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha\mathbf{r}^{(0)}\right)\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)} \\
&= \left[\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}\right) - \alpha\mathbf{A}\mathbf{r}^{(0)}\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)} \\
&= \left[\mathbf{r}^{(0)} - \alpha\mathbf{A}\mathbf{r}^{(0)}\right] \cdot \mathbf{r}^{(0)} \\
&= \mathbf{r}^{(0)} \cdot \mathbf{r}^{(0)} - \alpha\left(\mathbf{r}^{(0)} \cdot \mathbf{A}\mathbf{r}^{(0)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\alpha = \frac{\mathbf{r}^{(0)} \cdot \mathbf{r}^{(0)}}{\mathbf{r}^{(0)} \cdot \mathbf{A}\mathbf{r}^{(0)}}}
$$

# Método dos Gradientes

O processo iterativo é definido como:

1. $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}$;
2. $\alpha^{(k)} = \dfrac{\mathbf{r}^{(k)} \cdot \mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{r}^{(k)} \cdot \mathbf{A}\mathbf{r}^{(k)}}$;
3. $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)}\mathbf{r}^{(k)}$.

# Método dos Gradientes

O processo iterativo é definido como:

1. $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}$;
2. $\alpha^{(k)} = \dfrac{\mathbf{r}^{(k)} \cdot \mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{r}^{(k)} \cdot \mathbf{A}\mathbf{r}^{(k)}}$;
3. $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)}\mathbf{r}^{(k)}$.

## Exercício 5

Utilize o Método dos Gradiente com $\mathbf{x}^{(0)} = (-2, 2)^\top$ para calcular uma aproximação da solução do sistema abaixo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Note que a solução exata é $\mathbf{x} = (2, -2)^\top$.

# MATLAB – Método dos Gradientes

```
function [x,k] = gradientes(A,b,x0,tol)
% A: matriz SPD

kmax = 1000;
for k=1:kmax
    r = b - A*x0;
    if norm(r)<tol
        x = x0;
        k = k-1;
        return;
    end
    alpha = (r'*r)/(r'*A*r);
    x0 = x0 + alpha*r;
end

disp('Erro: o metodo nao converge.');
```