Sistemas Lineares: Métodos Diretos

Prof. Afonso Paiva

Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
USP – São Carlos

Métodos Numéricos e Computacionais I – SME0305

Introdução

Objetivo: o que há por trás do comando "\" do MATLAB?

Introdução

Objetivo: o que há por trás do comando "\" do MATLAB?

Para responder essa pergunta, vamos estudar métodos numéricos para solução de sistemas lineares:

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,.}$$

Esses métodos são divididos em:

Introdução

Objetivo: o que há por trás do comando "\" do MATLAB?

Para responder essa pergunta, vamos estudar métodos numéricos para solução de sistemas lineares:

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,.}$$

Esses métodos são divididos em:

- **Métodos Iterativos:** fornece uma sequência (convergente) de aproximações para o vetor solução $\mathbf{x}$ a partir de um chute inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

Introdução

Objetivo: o que há por trás do comando "\" do MATLAB?

Para responder essa pergunta, vamos estudar métodos numéricos para solução de sistemas lineares:

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,.}$$

Esses métodos são divididos em:

- **Métodos Iterativos:** fornece uma sequência (convergente) de aproximações para o vetor solução $\mathbf{x}$ a partir de um chute inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.
- **Métodos Diretos:** são aqueles que forneceriam a solução "exata" (a menos de erros de arredondamento) com um número finito de operações.

Conceitos Básicos de Sistemas Lineares

Podemos escrever $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ como

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}\,,$$

onde $\mathbf{a}_j$ é a j-ésima coluna de $\mathbf{A}$.

Conceitos Básicos de Sistemas Lineares

Podemos escrever $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ como

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}\,,$$

onde $\mathbf{a}_j$ é a j-ésima coluna de $\mathbf{A}$.

Se $\mathbf{A}$ é **não-singular** ($\det(\mathbf{A}) \neq 0$), então as colunas $\mathbf{a}_j$ são L.I.

Conceitos Básicos de Sistemas Lineares

Podemos escrever $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ como

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}\,,$$

onde $\mathbf{a}_j$ é a j-ésima coluna de $\mathbf{A}$.

Se $\mathbf{A}$ é **não-singular** ($\det(\mathbf{A}) \neq 0$), então as colunas $\mathbf{a}_j$ são L.I.

Logo, o vetor $\mathbf{b}$ é escrito de forma única como combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$!

Conceitos Básicos de Sistemas Lineares

Podemos escrever $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ como

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \mathbf{a}_3 x_3 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}\,,$$

onde $\mathbf{a}_j$ é a j-ésima coluna de $\mathbf{A}$.

Se $\mathbf{A}$ é **não-singular** ($\det(\mathbf{A}) \neq 0$), então as colunas $\mathbf{a}_j$ são L.I.

Logo, o vetor $\mathbf{b}$ é escrito de forma única como combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$!

Portanto, se $\mathbf{A}$ é não-singular, então o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possui uma **única solução**.

Conceitos Básicos de Sistemas Lineares

Em geral, um sistema linear de ordem n possui uma única solução se uma das seguintes condições (equivalentes) vale:

1. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$;
2. As colunas ou linhas de $\mathbf{A}$ são L.I.;
3. Existe uma matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$, tal que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$;
4. $C(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$;
5. $N(\mathbf{A}) = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.

Espaço Coluna e Espaço Nulo

Espaço Coluna

- $C(\mathbf{A}) \equiv$ contém todas as combinações lineares das colunas de $\mathbf{A}$;
- $dim(C(\mathbf{A})) \equiv$ **posto** de $\mathbf{A}$;
- $C(\mathbf{A}^\top) \equiv$ **espaço linha** de $\mathbf{A}$;
- $dim(C(\mathbf{A}^\top)) =$ posto de $\mathbf{A}$.

Espaço Coluna e Espaço Nulo

Espaço Coluna

- $C(\mathbf{A}) \equiv$ contém todas as combinações lineares das colunas de $\mathbf{A}$;
- $dim(C(\mathbf{A})) \equiv$ **posto** de $\mathbf{A}$;
- $C(\mathbf{A}^\top) \equiv$ **espaço linha** de $\mathbf{A}$;
- $dim(C(\mathbf{A}^\top)) =$ posto de $\mathbf{A}$.

Espaço Nulo

- $N(\mathbf{A}) \equiv$ contém todos os vetores $\mathbf{z}$ que satisfazem $\mathbf{Az} = \bar{\mathbf{0}}$;
- se $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n) \;\Rightarrow\; dim(N(\mathbf{A})) = n-$ posto de $\mathbf{A}$.

Espaço Coluna e Espaço Nulo

Exemplo 0

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$N(\mathbf{A}) = \{\alpha\,(1,-1)^\top \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$C(\mathbf{A}) = \{\beta\,(3,4)^\top \mid \beta \in \mathbb{R}\}$$

Espaço Coluna e Espaço Nulo

Exemplo 0

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$N(\mathbf{A}) = \{\alpha\,(1,-1)^\top \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$C(\mathbf{A}) = \{\beta\,(3,4)^\top \mid \beta \in \mathbb{R}\}$$

`p = rank(A)`: posto de **A**;

`N = null(A)`: base ortonormal de $N(\mathbf{A})$;

Regra de Cramer

Dado um sistema linear de ordem n, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, por que não usar a boa e velha Regra de Cramer para resolver :

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Regra de Cramer

Dado um sistema linear de ordem n, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, por que não usar a boa e velha Regra de Cramer para resolver :

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Usando a **Expansão de Laplace** no cálculo do det, precisamos de:

Regra de Cramer

Dado um sistema linear de ordem n, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, por que não usar a boa e velha Regra de Cramer para resolver :

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Usando a **Expansão de Laplace** no cálculo do det, precisamos de:

$$(n+1) \times \det(\text{ordem } n)$$

Regra de Cramer

Dado um sistema linear de ordem n, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, por que não usar a boa e velha Regra de Cramer para resolver :

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Usando a **Expansão de Laplace** no cálculo do det, precisamos de:

$$(n+1) \times n \times \det(\text{ordem } n-1)$$

Regra de Cramer

Dado um sistema linear de ordem n, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, por que não usar a boa e velha Regra de Cramer para resolver :

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Usando a **Expansão de Laplace** no cálculo do det, precisamos de:

$$(n+1) \times n \times n-1 \times \det(\text{ordem } n-2)$$

Regra de Cramer

Dado um sistema linear de ordem n, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, por que não usar a boa e velha Regra de Cramer para resolver :

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Usando a **Expansão de Laplace** no cálculo do det, precisamos de:

$$(n+1) \times \cdots \times 2 \times \det(\text{ordem } 1) \times 1$$

Regra de Cramer

Dado um sistema linear de ordem n, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, por que não usar a boa e velha Regra de Cramer para resolver :

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Usando a **Expansão de Laplace** no cálculo do det, precisamos de:

$3 \times (n+1)!$ flops (floating point operations)

Regra de Cramer

Dado um sistema linear de ordem n, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, por que não usar a boa e velha Regra de Cramer para resolver :

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Usando a **Expansão de Laplace** no cálculo do det, precisamos de:

$$3 \times (n+1)! \text{ flops (floating point operations)}$$

- se $n = 20 \implies 1.53 \times 10^{20}$ flops;

Regra de Cramer

Dado um sistema linear de ordem n, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, por que não usar a boa e velha Regra de Cramer para resolver :

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Usando a **Expansão de Laplace** no cálculo do det, precisamos de:

$3 \times (n+1)!$ flops (floating point operations)

- se $n = 20 \implies 1.53 \times 10^{20}$ flops;
- Intel core i7 realiza 9×10^9 flops/segundo;

Regra de Cramer

Dado um sistema linear de ordem n, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, por que não usar a boa e velha Regra de Cramer para resolver :

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Usando a **Expansão de Laplace** no cálculo do det, precisamos de:

$3 \times (n+1)!$ flops (floating point operations)

- se $n = 20 \implies 1.53 \times 10^{20}$ flops;
- Intel core i7 realiza 9×10^9 flops/segundo;
- tempo total: 1.7×10^{10} segundos $\approx$ 539 anos.

Matriz Triangular

Definição (matriz triangular inferior)

Uma matriz $\mathbf{L} \in \mathcal{M}(n, n)$ *é dita triangular inferior se* $\ell_{ij} = 0\,, \forall j > i$.

Matriz Triangular

Definição (matriz triangular inferior)

Uma matriz $\mathbf{L} \in \mathcal{M}(n,n)$ *é dita triangular inferior se* $\ell_{ij} = 0\,, \forall j > i$.

Definição (matriz triangular superior)

Uma matriz $\mathbf{U} \in \mathcal{M}(n,n)$ *é dita triangular superior se* $u_{ij} = 0\,, \forall i > j$.

Matriz Triangular

Definição (matriz triangular inferior)

Uma matriz $\mathbf{L} \in \mathcal{M}(n,n)$ *é dita triangular inferior se* $\ell_{ij} = 0\,, \forall j > i$.

Definição (matriz triangular superior)

Uma matriz $\mathbf{U} \in \mathcal{M}(n,n)$ *é dita triangular superior se* $u_{ij} = 0\,, \forall i > j$.

`L = tril(A)`: gera uma matriz triangular inferior de A;

`U = triu(A)`: gera uma matriz triangular superior de A;

Matriz Triangular

Definição (matriz triangular inferior)

Uma matriz $\mathbf{L} \in \mathcal{M}(n,n)$ *é dita triangular inferior se* $\ell_{ij} = 0\,, \forall j > i$.

Definição (matriz triangular superior)

Uma matriz $\mathbf{U} \in \mathcal{M}(n,n)$ *é dita triangular superior se* $u_{ij} = 0\,, \forall i > j$.

`L = tril(A)`: gera uma matriz triangular inferior de A;
`U = triu(A)`: gera uma matriz triangular superior de A;

Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}(n,n)$ são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente. Qual a forma eficiente de calcular $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$?

Matriz Triangular

Definição (matriz triangular inferior)

Uma matriz $\mathbf{L} \in \mathcal{M}(n,n)$ *é dita triangular inferior se* $\ell_{ij} = 0\,, \forall j > i$.

Definição (matriz triangular superior)

Uma matriz $\mathbf{U} \in \mathcal{M}(n,n)$ *é dita triangular superior se* $u_{ij} = 0\,, \forall i > j$.

`L = tril(A)`: gera uma matriz triangular inferior de A;
`U = triu(A)`: gera uma matriz triangular superior de A;

Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}(n,n)$ são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente. Qual a forma eficiente de calcular $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$?

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj} \quad \text{com} \quad m = \min\{i, j\}$$

Resolução de Sistemas Triangulares

Sistema Triangular Inferior

Um sistema linear de ordem n é **triangular inferior**, se tiver a forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

com $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

A solução pode ser obtida via **substituições diretas**, isto é:

Resolução de Sistemas Triangulares

Sistema Triangular Inferior

Um sistema linear de ordem n é **triangular inferior**, se tiver a forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

com $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

A solução pode ser obtida via **substituições diretas**, isto é:

$$a_{11}\, x_1 = b_1 \implies x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Resolução de Sistemas Triangulares

Sistema Triangular Inferior

Um sistema linear de ordem n é **triangular inferior**, se tiver a forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

com $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

A solução pode ser obtida via **substituições diretas**, isto é:

$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 = b_2 \implies x_2 = \frac{b_2 - a_{21}\, x_1}{a_{22}}$$

Resolução de Sistemas Triangulares

Sistema Triangular Inferior

Um sistema linear de ordem n é **triangular inferior**, se tiver a forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

com $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

A solução pode ser obtida via **substituições diretas**, isto é:

$$a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 = b_3 \implies x_3 = \frac{b_3 - a_{31}\, x_1 - a_{32}\, x_2}{a_{33}}$$

Resolução de Sistemas Triangulares

Sistema Triangular Inferior

Um sistema linear de ordem n é **triangular inferior**, se tiver a forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

com $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

A solução pode ser obtida via **substituições diretas**, isto é:

$$\boxed{x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j}{a_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, n}$$

MATLAB – Algoritmo de Substituições Progressivas

```
function x = sub_progressiva(L,b)
% L: matriz triangular inferior
% b: termo independente
% x: vetor solucao

n = length(b);
x = zeros(n,1);

for i=1:n
    x(i) = (b(i) - L(i,1:i-1)*x(1:i-1))/L(i,i);
end
```

Resolução de Sistemas Triangulares

Sistema Triangular Superior

Um sistema linear de ordem n é **triangular superior**, se tiver a forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

com $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

A solução pode ser obtida via **substituições diretas**, isto é:

Resolução de Sistemas Triangulares

Sistema Triangular Superior

Um sistema linear de ordem n é **triangular superior**, se tiver a forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

com $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

A solução pode ser obtida via **substituições diretas**, isto é:

$$a_{nn}\, x_n = b_n \implies x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Resolução de Sistemas Triangulares

Sistema Triangular Superior

Um sistema linear de ordem n é **triangular superior**, se tiver a forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

com $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

A solução pode ser obtida via **substituições diretas**, isto é:

$$a_{n-1,n-1}\, x_{n-1} + a_{n-1,n}\, x_n = b_{n-1} \implies x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}\, x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

Resolução de Sistemas Triangulares

Sistema Triangular Superior

Um sistema linear de ordem n é **triangular superior**, se tiver a forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

com $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

A solução pode ser obtida via **substituições diretas**, isto é:

$$\boxed{x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j}{a_{ii}}, \quad i = n, \ldots, 1}$$

MATLAB – Algoritmo de Substituições Regressivas

```
function x = sub_regressiva(U,y)
% U: matriz triangular superior
% y: termo independente
% x: vetor solucao

n = length(y);
x = zeros(n,1);

for i=n:-1:1
    x(i) = (y(i) - U(i,i+1:n)*x(i+1:n))/U(i,i);
end
```

Complexidade dos Algoritmos de Substituição

$$\boxed{x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j}{a_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, n}$$

Complexidade dos Algoritmos de Substituição

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j}{a_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Quantidade de flops:

$\#+$	$\#-$	$\#\times$	$\#\div$
$i-2$	1	$i-1$	1

Complexidade dos Algoritmos de Substituição

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j}{a_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Quantidade de flops:

$\#+$	$\#-$	$\#\times$	$\#\div$
$i-2$	1	$i-1$	1

$$\sum_{i=1}^{n}(i-2) + 2\times\sum_{i=1}^{n}1 + \sum_{i=1}^{n}(i-1)$$

Complexidade dos Algoritmos de Substituição

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j}{a_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Quantidade de flops:

$\#+$	$\#-$	$\#\times$	$\#\div$
$i-2$	1	$i-1$	1

$$\sum_{i=1}^{n}(i-2) + 2 \times \sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n}(i-1) \underset{\text{P.A.}}{=} \frac{n(n-3)}{2} + 2n + \frac{n(n-1)}{2}$$

Complexidade dos Algoritmos de Substituição

$$\boxed{x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j}{a_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, n}$$

Quantidade de flops:

$\#+$	$\#-$	$\#\times$	$\#\div$
$i-2$	1	$i-1$	1

$$\sum_{i=1}^{n}(i-2) + 2 \times \sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n}(i-1) \underset{\text{P.A.}}{=} \frac{n(n-3)}{2} + 2n + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 \text{ flops}$$

Aplicando os Algoritmos de Substituição

Sabendo que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 6 & 6 & 16 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

Como resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ com $\mathbf{b} = [2, 1, 4]^\top$?

Aplicando os Algoritmos de Substituição

Sabendo que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 6 & 6 & 16 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

Como resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ com $\mathbf{b} = [2, 1, 4]^\top$?

Solução:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{L} \cdot \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{L} \cdot \underbrace{(\mathbf{Ux})}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b}$$

Aplicando os Algoritmos de Substituição

Sabendo que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 6 & 6 & 16 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

Como resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ com $\mathbf{b} = [2, 1, 4]^\top$?

Solução:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{L} \cdot \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{L} \cdot \underbrace{(\mathbf{Ux})}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b}$$

1. Resolva $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ com substituições progressivas;
2. Resolva $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ com substituições regressivas.

Aplicando os Algoritmos de Substituição

Sabendo que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 6 & 6 & 16 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}$$

Como resolver $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ com $\mathbf{b} = [2, 1, 4]^\top$?

Solução:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{L} \cdot \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{L} \cdot \underbrace{(\mathbf{Ux})}_{\mathbf{y}} = \mathbf{b}$$

1. Resolva $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ com substituições progressivas;
2. Resolva $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ com substituições regressivas.

Como fatorar $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$?

Decomposição LU

Método de Doolittle

Objetivo: Dada $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$. Queremos $\mathbf{L}, \mathbf{U} \in \mathcal{M}(n,n)$, tal que

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}\,, \quad \text{com}}$$

Decomposição LU

Método de Doolittle

Objetivo: Dada $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$. Queremos $\mathbf{L}, \mathbf{U} \in \mathcal{M}(n,n)$, tal que

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}\,, \quad \text{com}}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

Esquema Prático

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

Esquema Prático

Cálculo da 1^a linha de U:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & & & & \\
\ell_{21} & 1 & & & \\
\ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
\ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\
 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\
 & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\
 & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & u_{nn}
\end{bmatrix}
$$

Decomposição LU

Esquema Prático

Cálculo da 1^a linha de U:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$u_{1j} = a_{1j}\,, \quad j = 1, \ldots, n\,.$$

Decomposição LU

Esquema Prático

Cálculo da 1^a coluna de L:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

Esquema Prático

Cálculo da 1^a coluna de L:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\ell_{i1} = {}^{a_{i1}}/u_{11}\,, \quad i = 2, \ldots, n\,.$$

Decomposição LU

Esquema Prático

Cálculo da 2^a linha de U:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

Esquema Prático

Cálculo da 2^a linha de U:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$u_{2j} = a_{2j} - \ell_{21} u_{1j}\,, \quad j = 2, \ldots, n\,.$$

Decomposição LU

Esquema Prático

Cálculo da 2^a coluna de L:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Decomposição LU

Esquema Prático

Cálculo da 2^a coluna de L:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & & & & \\
\ell_{21} & 1 & & & \\
\ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
\ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\
 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\
 & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\
 & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & u_{nn}
\end{bmatrix}
$$

$$
\ell_{i2} = \frac{a_{i2} - \ell_{i1} u_{12}}{u_{22}}, \quad i = 3, \ldots, n .
$$

Decomposição LU

Esquema Prático

Cálculo da 2^a coluna de L:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\ell_{i2} = \frac{a_{i2} - \ell_{i1} u_{12}}{u_{22}}, \quad i = 3, \ldots, n\,.$$

assim por diante... mas e o termo geral?

Decomposição LU

Termo Geral

(1) Cálculo de u_{ij} com $j \geq i \;\Rightarrow\; a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \ell_{ik}\, u_{kj}$

Decomposição LU

Termo Geral

(1) Cálculo de u_{ij} com $j \geq i \;\Rightarrow\; a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \ell_{ik}\, u_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}\, u_{kj} + \underbrace{\ell_{ii}}_{1} u_{ij}$

Decomposição LU

Termo Geral

(1) Cálculo de u_{ij} com $j \geq i \;\Rightarrow\; a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \ell_{ik}\, u_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}\, u_{kj} + \underbrace{\ell_{ii}}_{1} u_{ij}$

$$\boxed{u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}\, u_{kj}}$$

Decomposição LU

Termo Geral

(1) Cálculo de u_{ij} com $j \geq i \;\Rightarrow\; a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \ell_{ik}\, u_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}\, u_{kj} + \underbrace{\ell_{ii}}_{1} u_{ij}$

$$\boxed{u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}\, u_{kj}}$$

(2) Cálculo de ℓ_{ij} com $i > j \;\Rightarrow\; a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \ell_{ik}\, u_{kj}$

Decomposição LU

Termo Geral

(1) Cálculo de u_{ij} com $j \geq i \;\Rightarrow\; a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \ell_{ik}\, u_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}\, u_{kj} + \underbrace{\ell_{ii}}_{1} u_{ij}$

$$\boxed{u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}\, u_{kj}}$$

(2) Cálculo de ℓ_{ij} com $i > j \;\Rightarrow\; a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \ell_{ik}\, u_{kj} = \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\, u_{kj} + \ell_{ij}\, u_{jj}$

Decomposição LU

Termo Geral

(1) Cálculo de u_{ij} com $j \geq i \;\Rightarrow\; a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \ell_{ik}\, u_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}\, u_{kj} + \underbrace{\ell_{ii}}_{1}\, u_{ij}$

$$\boxed{u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik}\, u_{kj}}$$

(2) Cálculo de ℓ_{ij} com $i > j \;\Rightarrow\; a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \ell_{ik}\, u_{kj} = \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\, u_{kj} + \ell_{ij}\, u_{jj}$

$$\boxed{\ell_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik}\, u_{kj}}{u_{jj}}}$$

MATLAB – Decomposição LU

```
function [L,U] = lu_decomp(A)
% A: matriz quadrada
% L, U: matrizes triang. inf. e sup., respectivamente

n = size(A,1);
L = eye(n); U = zeros(n);

for k=1:n
    for j=k:n
        U(k,j) = A(k,j) - L(k,1:k-1) * U(1:k-1,j);
    end
    for i=k+1:n
        L(i,k) = (A(i,k) - L(i,1:k-1)*U(1:k-1,k))/U(k,k);
    end
end
```

Decomposição LU

Existência e Unicidade

Definição (menores principais)

Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$*. Os menores principais de* $\mathbf{A}$ *são as sub-matrizes da forma:*

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Decomposição LU

Existência e Unicidade

Definição (menores principais)

Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$. *Os menores principais de* $\mathbf{A}$ *são as sub-matrizes da forma:*

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Teorema

Sejam $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ *e* $\mathbf{A}_k$ *seu menor principal de ordem* k. *Se* $\det(\mathbf{A}_k) \neq 0$, *para* $k = 1, \ldots, n-1$ *então existem uma única* $\mathbf{L}$ *e uma única* $\mathbf{U}$, *tal que* $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$.

Decomposição LU

Cálculo do Determinante

Se $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$

Decomposição LU

Cálculo do Determinante

Se $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{L} \cdot \mathbf{U})$

Decomposição LU

Cálculo do Determinante

$$\text{Se } \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \;\Rightarrow\; \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}) = \underbrace{\det(\mathbf{L})}_{1} \det(\mathbf{U}).$$

Portanto,

Decomposição LU

Cálculo do Determinante

$$\text{Se } \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \;\Rightarrow\; \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}) = \underbrace{\det(\mathbf{L})}_{1} \det(\mathbf{U}).$$

Portanto,

$$\boxed{\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}}$$

Decomposição LU

Exercício 1

Reescreva a função `lu_decomp` em MATLAB, usando apenas um *loop* com `for`.

Exercício 2

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. A matriz $\mathbf{A}$ possui decomposição LU?
2. Calcule $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$;
3. Calcule $\det(\mathbf{A})$ via LU;
4. Resolva $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, com $\mathbf{b} = [3, 5, -1]^\top$.

Matriz Simétrica Positiva Definida (SPD)

Definição (matriz simétrica positiva definida)

Uma matriz simétrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ *(*$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$*) é dita simétrica positiva definida (SPD), se* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} > 0$*, para todo vetor não-nulo* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$*.*

Matriz Simétrica Positiva Definida (SPD)

Definição (matriz simétrica positiva definida)

Uma matriz simétrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ $(\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top)$ *é dita simétrica positiva definida (SPD), se* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} > 0$*, para todo vetor não-nulo* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Proposição

Cada um dos testes abaixo é uma condição necessária e suficiente para verificar se uma matriz simétrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ *é SPD:*

1. $\det(\mathbf{A}_k) > 0\,,\ k = 1, \ldots, n;$
2. *todos os autovalores de* $\mathbf{A}$ *são positivos.*

Matriz Simétrica Positiva Definida (SPD)

Definição (matriz simétrica positiva definida)

Uma matriz simétrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ *(*$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$*) é dita simétrica positiva definida (SPD), se* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} > 0$*, para todo vetor não-nulo* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$*.*

Proposição

Cada um dos testes abaixo é uma condição necessária e suficiente para verificar se uma matriz simétrica $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ *é SPD:*

1. $\det(\mathbf{A}_k) > 0\,,\; k = 1, \ldots, n;$
2. *todos os autovalores de* $\mathbf{A}$ *são positivos.*

Exemplo 1

A matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ é SPD.

Decomposição de Cholesky

Objetivo: Dada $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ SPD. Queremos $\mathbf{H} \in \mathcal{M}(n,n)$, tal que

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^\top, \quad \text{com}}$$

Decomposição de Cholesky

Objetivo: Dada $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ SPD. Queremos $\mathbf{H} \in \mathcal{M}(n,n)$, tal que

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^\top , \quad \text{com}}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & & & & \\ h_{21} & h_{22} & & & \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ h_{n1} & h_{n2} & h_{n3} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad h_{ii} > 0\,,\; i = 1, \ldots, n\,.$$

Decomposição de Cholesky

Termo Geral

(1) Diagonal: $h_{ii} \Rightarrow a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} h_{ik}(h_{ki})^\top$

Decomposição de Cholesky

Termo Geral

(1) Diagonal: $h_{ii} \Rightarrow a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} h_{ik}(h_{ki})^\top = \sum_{k=1}^{i} h_{ik}^2 = \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2 + h_{ii}^2$

Decomposição de Cholesky

Termo Geral

(1) Diagonal: $h_{ii} \Rightarrow a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} h_{ik}(h_{ki})^{\top} = \sum_{k=1}^{i} h_{ik}^2 = \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2 + h_{ii}^2$

$$\boxed{h_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2\right)^{1/2}}$$

Decomposição de Cholesky

Termo Geral

(1) Diagonal: $h_{ii} \Rightarrow a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} h_{ik}(h_{ki})^\top = \sum_{k=1}^{i} h_{ik}^2 = \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2 + h_{ii}^2$

$$h_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2 \right)^{1/2}$$

(2) Fora da diag.: h_{ij} com $i > j \Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} h_{ik} h_{jk}$

Decomposição de Cholesky

Termo Geral

(1) Diagonal: $h_{ii} \Rightarrow a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} h_{ik}(h_{ki})^\top = \sum_{k=1}^{i} h_{ik}^2 = \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2 + h_{ii}^2$

$$\boxed{h_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2\right)^{1/2}}$$

(2) Fora da diag.: h_{ij} com $i > j \Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} h_{ik}\,h_{jk} = \sum_{k=1}^{j-1} h_{ik}\,h_{jk} + h_{ij}\,h_{jj}$

Decomposição de Cholesky

Termo Geral

(1) Diagonal: $h_{ii} \Rightarrow a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} h_{ik}(h_{ki})^\top = \sum_{k=1}^{i} h_{ik}^2 = \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2 + h_{ii}^2$

$$\boxed{h_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2\right)^{1/2}}$$

(2) Fora da diag.: h_{ij} com $i > j \Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} h_{ik}\, h_{jk} = \sum_{k=1}^{j-1} h_{ik}\, h_{jk} + h_{ij}\, h_{jj}$

$$\boxed{h_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} h_{ik}\, h_{jk}}{h_{jj}}}$$

MATLAB – Decomposição de Cholesky

```
function H = chol_decomp(A)
% A: matriz SPD
% H: triang. inferior, tal que A = H*H'

n = size(A,1);
H = tril(A);

for k=1:n-1
    H(k,k) = sqrt(H(k,k));
    H(k+1:n,k) = H(k+1:n,k)/H(k,k);
    for j=k+1:n
        H(j:n,j) = H(j:n,j)-H(j:n,k)*H(j,k);
    end
end

H(n,n) = sqrt(H(n,n));
```

Decomposição de Cholesky

Corolário

Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ *SPD, então existe uma única matriz triangular inferior* $\mathbf{H} \in \mathcal{M}(n,n)$*, tal que* $\mathbf{A} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^\top$.

Decomposição de Cholesky

Corolário

Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ *SPD, então existe uma única matriz triangular inferior* $\mathbf{H} \in \mathcal{M}(n,n)$*, tal que* $\mathbf{A} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^\top$.

Complexidade para fatorar uma matriz quadrada de ordem n:

- **LU:** $\dfrac{2n^3}{3}$ flops
- **Cholesky:** $\dfrac{n^3}{3}$ flops
  - 50% mais eficiente que LU!
  - economia de memória, pois só armazena uma matriz!

Decomposição de Cholesky

Corolário

Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ *SPD, então existe uma única matriz triangular inferior* $\mathbf{H} \in \mathcal{M}(n,n)$*, tal que* $\mathbf{A} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^\top$.

Complexidade para fatorar uma matriz quadrada de ordem n:

- **LU:** $\dfrac{2n^3}{3}$ flops
- **Cholesky:** $\dfrac{n^3}{3}$ flops
  - 50% mais eficiente que LU!
  - economia de memória, pois só armazena uma matriz!

Exercício 3

Reescreva a função `lu_decomp` em MATLAB para que seja econômica em termos de memória, isto é, que retorne apenas uma matriz ao invés de duas (**L** e **U**).

Sistemas Lineares Equivalentes

Definição (sistemas lineares equivalentes)

Dois sistemas lineares são ditos equivalentes se tiverem a mesma solução.

Sistemas Lineares Equivalentes

Definição (sistemas lineares equivalentes)

Dois sistemas lineares são ditos equivalentes se tiverem a mesma solução.

Operações Elementares

Denotando por L_i a i-ésima linha (equação) de um sistema linear, temos 3 operações elementares:

1. Trocar duas linhas no sistema: $L_i \leftrightarrow L_j$
2. Multiplicar uma linha por um escalar $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$
3. Somar a uma linha um múltiplo de uma outra linha: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Sistemas Lineares Equivalentes

Definição (sistemas lineares equivalentes)

Dois sistemas lineares são ditos equivalentes se tiverem a mesma solução.

Operações Elementares

Denotando por L_i a i-ésima linha (equação) de um sistema linear, temos 3 operações elementares:

1. Trocar duas linhas no sistema: $L_i \leftrightarrow L_j$
2. Multiplicar uma linha por um escalar $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$
3. Somar a uma linha um múltiplo de uma outra linha: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Teorema

Se um sistema linear é obtido a partir de um outro sistema através de uma sequência finita de operações elementares, então eles são equivalentes.

Operações Elementares na forma Matricial

(1) Trocar duas linhas no sistema: $L_i \leftrightarrow L_j$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Operações Elementares na forma Matricial

(2) Multiplicar uma linha por um escalar $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda_{ii} L_i$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda_{ii} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Operações Elementares na forma Matricial

(3) Somar a uma linha um múltiplo de uma outra linha: $L_i \leftarrow L_i + \lambda_{ij} L_j$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \lambda_{ij} & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Operações Elementares na forma Matricial

(3) Somar a uma linha um múltiplo de uma outra linha: $L_i \leftarrow L_i + \lambda_{ij} L_j$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \lambda_{ij} & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{I} + \lambda_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^{\top} \,,}$$

onde **I** é a **matriz identidade**.

Operações Elementares na forma Matricial

Propriedades da operação elementar do **tipo (3)**:

- Preserva determinante

Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \end{bmatrix}$ e $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_i + \lambda L_j \\ \cdots \end{bmatrix}$, então

$$\det(\tilde{\mathbf{A}}) = \det\left(\begin{bmatrix} \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_i + \lambda L_j \\ \cdots \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \end{bmatrix}\right) + \lambda \det\left(\begin{bmatrix} \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \end{bmatrix}\right) = \det(\mathbf{A})$$

Operações Elementares na forma Matricial

Propriedades da operação elementar do **tipo (3)**:

- Cálculo da inversa

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \lambda_{ij} & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -\lambda_{ij} & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

Dado um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ de ordem n, onde $\mathbf{A}$ possui todos os menores principais não-singulares, isto é, $\det(\mathbf{A}_k) \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Eliminação de Gauss

Dado um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ de ordem n, onde $\mathbf{A}$ possui todos os menores principais não-singulares, isto é, $\det(\mathbf{A}_k) \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Objetivo: obter um sistema linear triangular superior equivalente a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ usando operações elementares que preservam determinante, ou seja, operações do tipo 3 (*escalonamento*). Depois, basta usar o **algoritmo de substituições regressivas** no sistema escalonado.

Eliminação de Gauss

Dado um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ de ordem n, onde $\mathbf{A}$ possui todos os menores principais não-singulares, isto é, $\det(\mathbf{A}_k) \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Objetivo: obter um sistema linear triangular superior equivalente a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ usando operações elementares que preservam determinante, ou seja, operações do tipo 3 (*escalonamento*). Depois, basta usar o **algoritmo de substituições regressivas** no sistema escalonado.

Para isso vamos utilizar a *matriz aumentada* $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]$.

Eliminação de Gauss

Processo Prático

Passo 1: anular todos os elementos abaixo do *pivô* $a_{11}^{(1)}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Processo Prático

Passo 1: anular todos os elementos abaixo do *pivô* $a_{11}^{(1)}$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

Para $i = 2, \ldots, n$, faça:

$$\boxed{L_i^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} + m_{i1} L_1^{(1)} \quad \text{com} \quad m_{i1} = {}^{-a_{i1}^{(1)}}\!/\!{}_{a_{11}^{(1)}}}$$

Eliminação de Gauss

Processo Prático

Passo 1: anular todos os elementos abaixo do *pivô* $a_{11}^{(1)}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

Para $i = 2, \ldots, n$, faça:

$$\boxed{L_i^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} + m_{i1}\, L_1^{(1)} \quad \text{com} \quad m_{i1} = {}^{-a_{i1}^{(1)}}\!/_{a_{11}^{(1)}}}$$

Eliminação de Gauss

Processo Prático

Passo 2: anular todos os elementos abaixo do *pivô* $a_{22}^{(2)}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)}
\end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Processo Prático

Passo 2: anular todos os elementos abaixo do *pivô* $a_{22}^{(2)}$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

Para $i = 3, \ldots, n$, faça:

$$\boxed{L_i^{(3)} \leftarrow L_i^{(2)} + m_{i2}\, L_2^{(2)} \quad \text{com} \quad m_{i2} = -a_{i2}^{(2)} / a_{22}^{(2)}}$$

Eliminação de Gauss

Processo Prático

Passo 2: anular todos os elementos abaixo do *pivô* $a_{22}^{(2)}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array}\right]$$

Para $i = 3, \ldots, n$, faça:

$$L_i^{(3)} \leftarrow L_i^{(2)} + m_{i2}\, L_2^{(2)} \quad \text{com} \quad m_{i2} = {}^{-a_{i2}^{(2)}}/{}_{a_{22}^{(2)}}$$

Eliminação de Gauss

Processo Prático

Passo 3: anular todos os elementos abaixo do *pivô* $a_{33}^{(3)}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Processo Prático

Passo 3: anular todos os elementos abaixo do *pivô* $a_{33}^{(3)}$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & & b_n^{(3)} \end{array}\right]$$

Para $i = 4, \ldots, n$, faça:

$$\boxed{L_i^{(4)} \leftarrow L_i^{(3)} + m_{i3}\, L_3^{(3)} \quad \text{com} \quad m_{i3} = -a_{i3}^{(3)} / a_{33}^{(3)}}$$

Eliminação de Gauss

Processo Prático

Passo 3: anular todos os elementos abaixo do *pivô* $a_{33}^{(3)}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(4)} & b_n^{(4)} \end{array}\right]$$

Para $i = 4, \ldots, n$, faça:

$$L_i^{(4)} \leftarrow L_i^{(3)} + m_{i3}\, L_3^{(3)} \quad \text{com} \quad m_{i3} = {-a_{i3}^{(3)}}/{a_{33}^{(3)}}$$

Eliminação de Gauss

Processo Prático

Passo $(n-1)$: anular todos os elementos abaixo do *pivô* $a_{n-1,n-1}^{(n-1)}$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & & b_n^{(n)} \end{array}\right]$$

Para $i = n$, faça:

$$L_i^{(n)} \leftarrow L_i^{(n-1)} + m_{i,n-1}\, L_{n-1}^{(n-1)} \quad \text{com} \quad m_{i,n-1} = {}^{-a_{i,n-1}^{(n-1)}}/_{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}$$

Eliminação de Gauss

Termo Geral

Para $k = 1, \ldots, n-1$, faça:

$$\boxed{L_i^{(k+1)} \leftarrow L_i^{(k)} + m_{ik} L_k^{(k)}, \quad i = k+1, \ldots, n}$$

$$\boxed{\text{com} \quad m_{ik} = -a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}}$$

MATLAB – Eliminação de Gauss

```
function x = eliminacao_gauss(A,b)
% A: matriz dos coeficientes
% b: vetor termo independente
% x: vetor solucao

n = size(A,1);

for k=1:n-1
    for i=k+1:n
        m = -A(i,k)/A(k,k);
        A(i,k:n) = A(i,k:n) + m*A(k,k:n);
        b(i) = b(i) + m*b(k);
    end
end

x = sub_regressiva(A,b);
```

Eliminação de Gauss

Forma Matricial

Passo 1: anular todos os elementos abaixo do *pivô* $a_{11}^{(1)}$

$$\mathbf{M}_1 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} = \mathbf{M}_1\mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1} \mathbf{x} = \mathbf{M}_1\mathbf{b}$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ m_{n1} & & & & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ m_{n1} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

Forma Matricial

Passo 2: anular todos os elementos abaixo do *pivô* $a_{22}^{(2)}$

$$\mathbf{M}_2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1} \mathbf{x} = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_2} \mathbf{x} = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{b}$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & m_{n2} & & & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & m_{32} & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & m_{32} & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & m_{n2} & & & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

Forma Matricial

Passo $(n-1)$: anular todos os elementos abaixo do *pivô* $a_{n-1,n-1}^{(n-1)}$

$$\mathbf{M}_{n-1}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{k-1}}\mathbf{x}=\mathbf{M}_{n-1}\cdots\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{b}\ \Leftrightarrow\ \underbrace{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_k=\mathbf{U}}\mathbf{x}=\mathbf{M}_{n-1}\cdots\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{b}$$

$$\mathbf{M}_{n-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

Forma Matricial

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{M}_{n-1} \cdots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1}_{\mathbf{M}} \mathbf{b} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{com}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2^{-1} \cdots \mathbf{M}_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \cdots & -m_{nn-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Conclusão: Eliminação de Gauss e Decomposição LU são equivalentes. Logo, possuem a mesma complexidade ($2/3\, n^3$ flops).

Eliminação de Gauss

Exercício 4

Seja $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$.

1. Resolva o sistema linear usando Eliminação de Gauss;
2. Calcule a decomposição LU da matriz dos coeficientes.

Eliminação de Gauss

Resolução do Exercício 4

Questão 1:

pivô a_{11}: $L_i \leftarrow L_i + m_{i1}L_1$ com $i = 2, 3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Resolução do Exercício 4

Questão 1:

pivô a_{11}: $L_i \leftarrow L_i + m_{i1}L_1$ com $i = 2, 3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{\mathbf{2}} & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{21}=-2} \left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{\mathbf{2}} & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Resolução do Exercício 4

Questão 1:

pivô a_{11}: $L_i \leftarrow L_i + m_{i1}L_1$ com $i = 2, 3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{\mathbf{2}} & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{21}=-2} \left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{\mathbf{2}} & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{31}=-3} \left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{\mathbf{2}} & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & 9 \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Resolução do Exercício 4

Questão 1:

pivô a_{11}: $L_i \leftarrow L_i + m_{i1}L_1$ com $i = 2, 3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{21}=-2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{31}=-3} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & 9 \end{array}\right]$$

pivô a_{22}: $L_3 \leftarrow L_3 + m_{32}L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & 9 \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Resolução do Exercício 4

Questão 1:

pivô a_{11}: $L_i \leftarrow L_i + m_{i1}L_1$ com $i = 2, 3$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{2} & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{21}=-2} \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{2} & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{31}=-3} \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{2} & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & 9 \end{array}\right]$$

pivô a_{22}: $L_3 \leftarrow L_3 + m_{32}L_2$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{32}=-2} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Resolução do Exercício 4

Questão 1:

pivô a_{11}: $L_i \leftarrow L_i + m_{i1}L_1$ com $i = 2,3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{21}=-2} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{31}=-3} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & 9 \end{array}\right]$$

pivô a_{22}: $L_3 \leftarrow L_3 + m_{32}L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{32}=-2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right]$$

Usando substituições regressivas, temos a solução do sistema $[\mathbf{0}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}]^\top$

Eliminação de Gauss

Resolução do Exercício 4

Questão 2: $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

Resolução do Exercício 4

Questão 2: $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

Pivoteamento Parcial

Problema: o que fazer quando um pivô é nulo ou próximo de zero?

Eliminação de Gauss

Pivoteamento Parcial

Problema: o que fazer quando um pivô é nulo ou próximo de zero?

Exemplo 2

Resolva o sistema linear abaixo, cuja solução exata é $\mathbf{x} = (1,1)^\top$, usando o comando "\" do MATLAB. Compare o resultado com a função `eliminacao_gauss`.

$$\begin{bmatrix} 10^{-5} & 10 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.00001 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

Pivoteamento Parcial

Problema: o que fazer quando um pivô é nulo ou próximo de zero?

Exemplo 2

Resolva o sistema linear abaixo, cuja solução exata é $\mathbf{x} = (1,1)^\top$, usando o comando "\" do MATLAB. Compare o resultado com a função `eliminacao_gauss`.

$$\begin{bmatrix} 10^{-5} & 10 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.00001 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solução: basta escolher um *bom* pivô!

Eliminação de Gauss

Pivoteamento Parcial

Estratégia de Pivoteamento Parcial

1. A cada passo k, antes da etapa de eliminação, encontre $p \in [k, n]$ que satisfaça:

$$\boxed{|a_{pk}^{(k)}| = \max_{i=k,\ldots,n} \{|a_{ik}^{(k)}|\}}$$

Eliminação de Gauss

Pivoteamento Parcial

Estratégia de Pivoteamento Parcial

1. A cada passo k, antes da etapa de eliminação, encontre $p \in [k, n]$ que satisfaça:

$$\boxed{|a_{pk}^{(k)}| = \max_{i=k,\ldots,n} \{|a_{ik}^{(k)}|\}}$$

2. Permute as linhas k e p.

Eliminação de Gauss

Pivoteamento Parcial

Exercício 5

Seja $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Resolva o sistema linear acima usando Eliminação de Gauss com Pivoteamento Parcial.

Eliminação de Gauss

Resolução do Exercício 5

pivô a_{11}: $L_2 \leftarrow L_2 + m_{21}L_1$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{0} & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Resolução do Exercício 5

pivô a_{11}: $L_2 \leftarrow L_2 + m_{21} L_1$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{0} & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{-2} & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Resolução do Exercício 5

pivô a_{11}: $L_2 \leftarrow L_2 + m_{21} L_1$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{0} & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{-2} & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{21}=1/2} \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{-2} & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 23/2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Resolução do Exercício 5

pivô a_{11}: $L_2 \leftarrow L_2 + m_{21}L_1$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{0} & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{-2} & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{21}=1/2} \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{-2} & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 23/2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

pivô a_{22}: $L_3 \leftarrow L_3 + m_{32}L_2$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & \mathbf{1/2} & 7/2 & 23/2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Resolução do Exercício 5

pivô a_{11}: $L_2 \leftarrow L_2 + m_{21} L_1$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{0} & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{-2} & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{21}=1/2} \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{-2} & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 23/2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

pivô a_{22}: $L_3 \leftarrow L_3 + m_{32} L_2$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & \mathbf{1/2} & 7/2 & 23/2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 8 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 23/2 \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Resolução do Exercício 5

pivô a_{11}: $L_2 \leftarrow L_2 + m_{21}L_1$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{0} & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{-2} & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{21}=1/2} \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{-2} & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 23/2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

pivô a_{22}: $L_3 \leftarrow L_3 + m_{32}L_2$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & \mathbf{1/2} & 7/2 & 23/2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 8 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 23/2 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{32}=-1/2} \left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 5/2 & 15/2 \end{array}\right]$$

Eliminação de Gauss

Resolução do Exercício 5

pivô a_{11}: $L_2 \leftarrow L_2 + m_{21}L_1$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{0} & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{-2} & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{21}=1/2} \left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{-2} & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 23/2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

pivô a_{22}: $L_3 \leftarrow L_3 + m_{32}L_2$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & \mathbf{1/2} & 7/2 & 23/2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 8 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 23/2 \end{array}\right] \xrightarrow{m_{32}=-1/2} \left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 5/2 & 15/2 \end{array}\right]$$

Usando substituições regressivas, temos a solução do sistema $[\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}]^\top$

MATLAB – Eliminação de Gauss com Pivoteamento

```
function x = eliminacao_gauss_pivot(A,b)
% A: matriz dos coeficientes
% b: vetor termo independente
% x: vetor solucao

n = size(A,1);
for k=1:n-1
    [~,p] = max(abs(A(k:n,k)));
    p = p+(k-1);
    A([k p],k:n) = A([p k],k:n);
    b([k p]) = b([p k]);

    for i=k+1:n
        m = -A(i,k)/A(k,k);
        A(i,k:n) = A(i,k:n) + m*A(k,k:n);
        b(i) = b(i) + m*b(k);
    end
end
```

Eliminação de Gauss com Pivoteamento

Decomposição $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$

Como ficaria a Decomposição LU agora que sabemos fazer pivoteamento?

Eliminação de Gauss com Pivoteamento

Decomposição $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$

Como ficaria a Decomposição LU agora que sabemos fazer pivoteamento?

$$\boxed{\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}\,,}$$

onde $\mathbf{P}$ é uma **matriz de permutação**.

Eliminação de Gauss com Pivoteamento

Decomposição $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$

Como ficaria a Decomposição LU agora que sabemos fazer pivoteamento?

$$\boxed{\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}\,,}$$

onde $\mathbf{P}$ é uma **matriz de permutação**.

Teorema

Se $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ *é invertível, então existe uma única decomposição* $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$.

Além disso, $\det(\mathbf{A}) = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$, *onde* p *é o número de permutações de* $\mathbf{A}$.

Eliminação de Gauss com Pivoteamento

Decomposição $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$

Como ficaria a Decomposição LU agora que sabemos fazer pivoteamento?

$$\boxed{\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}\,,}$$

onde $\mathbf{P}$ é uma **matriz de permutação**.

Teorema

Se $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ *é invertível, então existe uma única decomposição* $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$*.*

Além disso, $\det(\mathbf{A}) = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$*, onde* p *é o número de permutações de* $\mathbf{A}$*.*

Resolvendo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

Eliminação de Gauss com Pivoteamento

Decomposição $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$

Como ficaria a Decomposição LU agora que sabemos fazer pivoteamento?

$$\boxed{\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}\,,}$$

onde $\mathbf{P}$ é uma **matriz de permutação**.

Teorema

Se $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ *é invertível, então existe uma única decomposição* $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$. *Além disso,* $\det(\mathbf{A}) = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$, *onde* p *é o número de permutações de* $\mathbf{A}$.

Resolvendo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$: $\quad (\mathbf{L} \cdot \mathbf{U})\mathbf{x} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{b}$

Eliminação de Gauss com Pivoteamento

Decomposição $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$

Como ficaria a Decomposição LU agora que sabemos fazer pivoteamento?

$$\boxed{\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}\,,}$$

onde $\mathbf{P}$ é uma **matriz de permutação**.

Teorema

Se $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n, n)$ *é invertível, então existe uma única decomposição* $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$.

Além disso, $\det(\mathbf{A}) = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$, *onde* p *é o número de permutações de* $\mathbf{A}$.

Resolvendo $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$: $\quad (\mathbf{L} \cdot \mathbf{U})\mathbf{x} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{b}$

1. Resolva $\mathbf{Ly} = \mathbf{P}\,\mathbf{b}$ com substituições progressivas;
2. Resolva $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ com substituições regressivas.

Eliminação de Gauss

Pivoteamento Parcial

Exercício 6

Calcule a Decomposição $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ da matriz do sistema linear do exercício anterior.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

Pivoteamento Parcial

Exercício 6

Calcule a Decomposição $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ da matriz do sistema linear do exercício anterior.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

Pivoteamento Parcial

Exercício 6

Calcule a Decomposição $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ da matriz do sistema linear do exercício anterior.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

Pivoteamento Parcial

Exercício 6

Calcule a Decomposição $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ da matriz do sistema linear do exercício anterior.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Mas como L foi obtida?

Eliminação de Gauss

Pivoteamento Parcial

Exercício 6

Calcule a Decomposição $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ da matriz do sistema linear do exercício anterior.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Mas como L foi obtida?

$$\mathbf{M}_2\mathbf{P}_2\mathbf{M}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$$

Eliminação de Gauss

Pivoteamento Parcial

Exercício 6

Calcule a Decomposição $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ da matriz do sistema linear do exercício anterior.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Mas como L foi obtida?

$$\mathbf{M}_2\mathbf{P}_2\mathbf{M}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{P}_1\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{U}$$

Eliminação de Gauss

Pivoteamento Parcial

Exercício 6

Calcule a Decomposição $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ da matriz do sistema linear do exercício anterior.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Mas como L foi obtida?

$$\mathbf{M}_2\mathbf{P}_2\mathbf{M}_1\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{P}_1\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{PA} = \underbrace{\mathbf{P}\mathbf{P}_1\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{M}_2^{-1}}_{\mathbf{L}}\mathbf{U}$$

MATLAB – Decomposição $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$

```
function [L,U,P] = lup_decomp(A)
% A: matriz nao-singular
% L, U: matrizes triang. inf. e sup., respectivamente
% P: matriz de permutacao

n = size(A,1);
P = eye(n); L = P; U = A;
for k=1:n
    [~,p] = max(abs(U(k:n,k)));
    p = p+(k-1);
    P([k p],:) = P([p k],:);
    U([k p],k:n) = U([p k],k:n);
    L([k p],1:k-1) = L([p k],1:k-1);

    for i=k+1:n
        L(i,k) = U(i,k)/U(k,k);
        U(i,k:n) = U(i,k:n) - L(i,k)*U(k,k:n);
    end
end
```

Cálculo da Inversa

Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ uma matriz não-singular. Vamos calcular a **matriz inversa** de $\mathbf{A}$, isto é, $\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{array}\right]$, em que $\mathbf{v}_i$ é a i-ésima coluna de $\mathbf{A}^{-1}$.

Cálculo da Inversa

Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ uma matriz não-singular. Vamos calcular a **matriz inversa** de $\mathbf{A}$, isto é, $\mathbf{A}^{-1} = \left[\ \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\ \right]$, em que $\mathbf{v}_i$ é a i-ésima coluna de $\mathbf{A}^{-1}$. Logo,

$$\mathbf{A} \cdot \left[\ \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\ \right] = \left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{e}_n\ \right],$$

onde $\mathbf{e}_i$ é a i-ésima coluna da matriz identidade $\mathbf{I}$.

Cálculo da Inversa

Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ uma matriz não-singular. Vamos calcular a **matriz inversa** de $\mathbf{A}$, isto é, $\mathbf{A}^{-1} = \left[\ \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\ \right]$, em que $\mathbf{v}_i$ é a i-ésima coluna de $\mathbf{A}^{-1}$. Logo,

$$\mathbf{A} \cdot \left[\ \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\ \right] = \left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{e}_n\ \right],$$

onde $\mathbf{e}_i$ é a i-ésima coluna da matriz identidade $\mathbf{I}$.

Portanto, basta resolver os n sistemas lineares:

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i\,, \quad i = 1, \ldots, n}$$

Cálculo da Inversa

Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ uma matriz não-singular. Vamos calcular a **matriz inversa** de $\mathbf{A}$, isto é, $\mathbf{A}^{-1} = \left[\ \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\ \right]$, em que $\mathbf{v}_i$ é a i-ésima coluna de $\mathbf{A}^{-1}$. Logo,

$$\mathbf{A} \cdot \left[\ \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\ \right] = \left[\ \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{e}_n\ \right],$$

onde $\mathbf{e}_i$ é a i-ésima coluna da matriz identidade $\mathbf{I}$.

Portanto, basta resolver os n sistemas lineares:

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i\,, \quad i = 1, \ldots, n}$$

Complexidade: $\dfrac{8n^3}{3}$ flops.

Cálculo da Inversa

Exercício 7

Dada uma matriz quadrada não-singular $\mathbf{A}$. Faça uma função em MATLAB que calcule $\mathbf{A}^{-1}$ e que tenha o seguinte protótipo `Y = inversa(A)`.

Resumo em MATLAB

`[L,U,P] = lu(A)`: calcula a decomposição $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$;
`L,U`: matrizes triangular inferior e superior, respectivamente;
`P`: matriz de permutação;

`H = chol(A)`: calcula a decomposição de Cholesky de $\mathbf{A}$;
`B = inv(A)`: calcula a inversa $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$;