Álgebra Linear Contra-Ataca

Prof. Afonso Paiva

Departamento de Matemática Aplicada e Estatística
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
USP – São Carlos

Cálculo Numérico – SME0104

Operações Elementares

Matrizes

Notação: vamos denotar por $\mathcal{M}(m,n)$ o conjunto das matrizes reais com m linhas e n colunas.

$$\mathbf{A} \in \mathcal{M}(m,n) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Operações Elementares

Matrizes

Notação: vamos denotar por $\mathcal{M}(m,n)$ o conjunto das matrizes reais com m linhas e n colunas.

$$\mathbf{A} \in \mathcal{M}(m,n) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(M1) transposta: $\mathcal{M}(m,n) \to \mathcal{M}(n,m)$

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A}^\top \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = a_{ji}}$$

Operações Elementares

Matrizes

(M2) adição: $\mathcal{M}(m,n) \times \mathcal{M}(m,n) \to \mathcal{M}(m,n)$

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

Operações Elementares

Matrizes

(M2) adição: $\mathcal{M}(m,n) \times \mathcal{M}(m,n) \to \mathcal{M}(m,n)$

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

(M3) multiplicação por um escalar: $\mathbb{R} \times \mathcal{M}(m,n) \to \mathcal{M}(m,n)$

$$\boxed{\mathbf{C} = \lambda\,\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = \lambda\,a_{ij}}$$

Operações Elementares

Matrizes

(M4) multiplicação de matrizes: $\mathcal{M}(m,p) \times \mathcal{M}(p,n) \to \mathcal{M}(m,n)$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

Operações Elementares

Matrizes

(M4) multiplicação de matrizes: $\mathcal{M}(m,p) \times \mathcal{M}(p,n) \to \mathcal{M}(m,n)$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}}$$

Operações Elementares

Matrizes

(M4) multiplicação de matrizes: $\mathcal{M}(m,p) \times \mathcal{M}(p,n) \to \mathcal{M}(m,n)$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}}$$

Por convenção: $\sum_{k=i}^{j} u_k \equiv 0 \iff i > j$

Operações Elementares

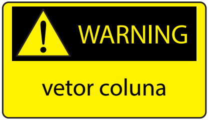
Vetores

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\top$$

Operações Elementares

Vetores

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\top$$



Operações Elementares

Vetores

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad \iff \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\top$$

WARNING

vetor coluna

(V1) adição: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad u_i = v_i + w_i}$$

Operações Elementares

Vetores

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \iff \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\top$$

WARNING

vetor coluna

(V1) adição: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad u_i = v_i + w_i$$

(V2) multiplicação por um escalar: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{u} = \lambda\, \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad u_i = \lambda\, v_i$$

Espaço Vetorial

Definição (espaço vetorial)

Um espaço vetorial V é um conjunto que possui definidas as operações de soma e de produto (multiplicação por escalar pertencente a $\mathbb{R}$) e fechado com respeito a elas. Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, as seguintes propriedades:

- **comutatividade**: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;

Espaço Vetorial

Definição (espaço vetorial)

Um espaço vetorial V é um conjunto que possui definidas as operações de soma e de produto (multiplicação por escalar pertencente a $\mathbb{R}$) e fechado com respeito a elas. Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, as seguintes propriedades:

- **comutatividade**: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;
- **associatividade**: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *e* $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$;

Espaço Vetorial

Definição (espaço vetorial)

Um espaço vetorial V é um conjunto que possui definidas as operações de soma e de produto (multiplicação por escalar pertencente a $\mathbb{R}$) e fechado com respeito a elas. Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, as seguintes propriedades:

- **comutatividade**: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;
- **associatividade**: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *e* $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$;
- **elemento neutro**: *existe um vetor* $\overline{0} \in V$*, tal que* $\mathbf{v} + \overline{0} = \overline{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ *para todo* $\mathbf{v} \in V$;

Espaço Vetorial

Definição (espaço vetorial)

Um espaço vetorial V é um conjunto que possui definidas as operações de soma e de produto (multiplicação por escalar pertencente a $\mathbb{R}$) e fechado com respeito a elas. Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, as seguintes propriedades:

- **comutatividade**: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;
- **associatividade**: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *e* $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$;
- **elemento neutro**: *existe um vetor* $\overline{0} \in V$, *tal que* $\mathbf{v} + \overline{0} = \overline{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ *para todo* $\mathbf{v} \in V$;
- **inverso aditivo**: *para cada vetor* $\mathbf{v} \in V$ *existe um vetor* $-\mathbf{v} \in V$, *tal que* $-\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \overline{0}$;

Espaço Vetorial

Definição (espaço vetorial)

Um espaço vetorial V é um conjunto que possui definidas as operações de soma e de produto (multiplicação por escalar pertencente a $\mathbb{R}$) e fechado com respeito a elas. Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, as seguintes propriedades:

- **comutatividade**: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;
- **associatividade**: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *e* $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$;
- **elemento neutro**: *existe um vetor* $\overline{0} \in V$, *tal que* $\mathbf{v} + \overline{0} = \overline{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ *para todo* $\mathbf{v} \in V$;
- **inverso aditivo**: *para cada vetor* $\mathbf{v} \in V$ *existe um vetor* $-\mathbf{v} \in V$, *tal que* $-\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \overline{0}$;
- **distributiva**: $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$ *e* $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$;

Espaço Vetorial

Definição (espaço vetorial)

Um espaço vetorial V é um conjunto que possui definidas as operações de soma e de produto (multiplicação por escalar pertencente a $\mathbb{R}$) e fechado com respeito a elas. Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, as seguintes propriedades:

- **comutatividade**: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;
- **associatividade**: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *e* $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$;
- **elemento neutro**: *existe um vetor* $\bar{0} \in V$*, tal que* $\mathbf{v} + \bar{0} = \bar{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ *para todo* $\mathbf{v} \in V$;
- **inverso aditivo**: *para cada vetor* $\mathbf{v} \in V$ *existe um vetor* $-\mathbf{v} \in V$*, tal que* $-\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \bar{0}$;
- **distributiva**: $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$ *e* $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$;
- **multiplicação por 1**: $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Subespaço Vetorial

Definição (subespaço vetorial)

Um subespaço vetorial de V é um subconjunto $S \subset V$ *que satisfaz as seguintes propriedades:*

- $\bar{0} \in S$;
- *se* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ *então* $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$;
- *se* $\mathbf{v} \in S$ *então* $\alpha \mathbf{v} \in S$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Subespaço Vetorial

Definição (subespaço vetorial)

Um subespaço vetorial de V é um subconjunto $S \subset V$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\overline{0} \in S$;
- *se* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ *então* $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$;
- *se* $\mathbf{v} \in S$ *então* $\alpha\mathbf{v} \in S$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema

Todo subespaço vetorial é um espaço vetorial.

Subespaço Vetorial

Exemplo 1

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial. Os hiperplanos de $\mathbb{R}^n$ que passam pela origem são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$.

Subespaço Vetorial

Exemplo 1

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial. Os hiperplanos de $\mathbb{R}^n$ que passam pela origem são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2

O conjunto $\mathcal{M}(n, n)$ das matrizes reais quadradas de ordem n é um espaço vetorial. O conjunto das matrizes simétricas de ordem n é um subspaço vetorial de $\mathcal{M}(n, n)$.

Subespaço Vetorial

Exemplo 1

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial. Os hiperplanos de $\mathbb{R}^n$ que passam pela origem são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2

O conjunto $\mathcal{M}(n, n)$ das matrizes reais quadradas de ordem n é um espaço vetorial. O conjunto das matrizes simétricas de ordem n é um subspaço vetorial de $\mathcal{M}(n, n)$.

Exemplo 3

Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Então são subspaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$:

$$\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^k(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$$

Base e Dimensão

Definição (conjunto L.I.)

Um conjunto $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n\} \subset V$ é dito linearmente independente (L.I.) se

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_n\varphi_n = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0\,.$$

Base e Dimensão

Definição (conjunto L.I.)

Um conjunto $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n\} \subset V$ *é dito linearmente independente (L.I.) se*

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \cdots + \alpha_n \varphi_n = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \, .$$

Definição (base de espaço vetorial)

Um conjunto $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset V$ *é uma base de um espaço vetorial* V *se for L.I. e gerar* V*. Isto é, todo vetor* $\mathbf{v} \in V$ *é escrito, de forma única, como combinação linear dos elementos de* $\mathcal{B}$*:*

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \varphi_1 + \cdots + \alpha_n \varphi_n \, .$$

Base e Dimensão

Definição (dimensão)

A dimensão de um espaço vetorial V, denotada por $\dim(V)$, é o número máximo de elementos L.I. nele contido.

Base e Dimensão

Definição (dimensão)

A dimensão de um espaço vetorial V, denotada por $\dim(V)$, é o número máximo de elementos L.I. nele contido.

Teorema

Todo espaço vetorial de dimensão $n < \infty$ tem uma base.

Base e Dimensão

Definição (dimensão)

A dimensão de um espaço vetorial V, denotada por $\dim(V)$, é o número máximo de elementos L.I. nele contido.

Teorema

Todo espaço vetorial de dimensão $n < \infty$ tem uma base.

Definição

Se para qualquer conjunto de vetores de V sempre é possível encontrar um vetor L.I. à este conjunto, então dizemos que $\dim(V) = \infty$.

Base e Dimensão

Exemplo 4

Seja $V = \mathbb{R}^n$. Uma base para V é $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$, onde

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

Ainda, $dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Base e Dimensão

Exemplo 5

Seja $V = \mathcal{M}(m,n)$, uma base para V é o conjunto $\mathcal{B} = \{E_{11}, \ldots, E_{mn}\} \subset \mathcal{M}(m,n)$, onde:

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & & & 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 & & & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & \uparrow & & & \\ & & & j & & & \end{array} & \end{array}$$

Ainda, $dim(\mathcal{M}(m,n)) = m \cdot n$.

Base e Dimensão

Exemplo 6

Se $V = \mathcal{C}(\mathbb{R})$, então $dim(V) = \infty$.
Se $S = \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \subset V$, então $dim(S) = n + 1$. Uma base para S seria

$$\mathcal{B} = \{x^i : i = 0, \ldots, n\} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

É fácil verificar que todo polinômio $p \in \mathcal{P}_n$, de grau $\leq n$, pode ser escrito como

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$$

que é uma combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$.

Produto Interno

Definição (produto interno)

Uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ *é um produto interno se satisfaz as seguintes propriedades:*

- *bilinearidade:*

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{z} \rangle &= \alpha\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \beta\langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle \\ \langle \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle &= \alpha\langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle, \end{aligned}$$

  $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$;

Produto Interno

Definição (produto interno)

Uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ *é um produto interno se satisfaz as seguintes propriedades:*

- *bilinearidade:*

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{z} \rangle &= \alpha\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \beta\langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle \\ \langle \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle &= \alpha\langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle, \end{aligned}$$

  $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V$;

- *comutatividade (simetria):*

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V\ ;$$

Produto Interno

Definição (produto interno)

Uma aplicação $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ *é um produto interno se satisfaz as seguintes propriedades:*

- *bilinearidade:*

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{z}\rangle &= \alpha\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle + \beta\langle \mathbf{v},\mathbf{z}\rangle \\ \langle \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}, \mathbf{z}\rangle &= \alpha\langle \mathbf{v},\mathbf{z}\rangle + \beta\langle \mathbf{w},\mathbf{z}\rangle, \end{aligned}$$

  $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in V;$

- *comutatividade (simetria):*

$$\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{w},\mathbf{v}\rangle \quad \forall\, \mathbf{v},\mathbf{w} \in V\,;$$

- *positividade:*

$$\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{v}, \quad e \quad \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v} = \overline{0}$$

Produto Interno

Exemplo 7

No $\mathbb{R}^n$, o *produto interno usual* (produto escalar) dos vetores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top$ é definido por:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$$

Produto Interno

Exemplo 7

No $\mathbb{R}^n$, o *produto interno usual* (produto escalar) dos vetores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top$ é definido por:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$$

Exemplo 8

No espaço $\mathcal{M}(n,n)$, um exemplo de produto interno entre as matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}(n,n)$ é dado por:

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

Produto Interno

Exemplo 9

No espaço $\mathcal{C}([a,b])$ (espaço das funções contínuas no intervalo $[a,b]$), um exemplo de produto interno entre as funções contínuas $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ é dado por:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Norma

Definição (norma)

Seja V um espaço vetorial. Uma aplicação $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:

$$
\begin{array}{rcl}
\|\mathbf{v}\| & \geq & 0, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V \\
\|\mathbf{v}\| & = & 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v} = \bar{0} \\
\|\lambda \mathbf{v}\| & = & |\lambda|\|\mathbf{v}\|, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V \quad e \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; \\
\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| & \leq & \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|, \quad \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V
\end{array}
$$

é dita norma em V.

Norma

Definição (norma)

Seja V um espaço vetorial. Uma aplicação $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:

$$\begin{array}{rcl} \|\mathbf{v}\| & \geq & 0, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V \\ \|\mathbf{v}\| & = & 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v} = \bar{0} \\ \|\lambda \mathbf{v}\| & = & |\lambda|\|\mathbf{v}\|, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V \quad e \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; \\ \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| & \leq & \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|, \quad \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \end{array}$$

é dita norma em V.

Definição (norma induzida)

$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$

Norma

Definição (norma)

Seja V um espaço vetorial. Uma aplicação $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}\| &\geq 0, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V \\
\|\mathbf{v}\| &= 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v} = \bar{0} \\
\|\lambda\mathbf{v}\| &= |\lambda|\|\mathbf{v}\|, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V \quad e \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; \\
\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| &\leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|, \quad \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V
\end{aligned}$$

é dita norma em V.

Definição (norma induzida)

$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\boxed{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

Normas de Vetor

São exemplos de normas em $\mathbb{R}^n$:

1. norma do máximo

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \{|x_i|\}$$

Normas de Vetor

São exemplos de normas em $\mathbb{R}^n$:

1. norma do máximo

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \{|x_i|\}$$

2. norma da soma

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Normas de Vetor

São exemplos de normas em $\mathbb{R}^n$:

1. norma do máximo

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \{|x_i|\}$$

2. norma da soma

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

3. norma euclidiana

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Normas de Vetor

São exemplos de normas em $\mathbb{R}^n$:

1. norma do máximo

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \{|x_i|\}$$

2. norma da soma

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

3. norma euclidiana

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Em particular, a norma $\|\cdot\|_2$ provém do produto interno

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Normas de Vetor

Exemplo 10

Seja $\mathbf{x} = (1, 2, -5)^\top$

Normas de Vetor

Exemplo 10

Seja $\mathbf{x} = (1, 2, -5)^\top$

1. $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|1|, |2|, |-5|\} = 5$

Normas de Vetor

Exemplo 10

Seja $\mathbf{x} = (1, 2, -5)^\top$

1. $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|1|, |2|, |-5|\} = 5$
2. $\|\mathbf{x}\|_1 = |1| + |2| + |-5| = 8$

Normas de Vetor

Exemplo 10

Seja $\mathbf{x} = (1, 2, -5)^\top$

1. $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|1|, |2|, |-5|\} = 5$
2. $\|\mathbf{x}\|_1 = |1| + |2| + |-5| = 8$
3. $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{30} \approx 5.48$

Normas de Vetor

Exemplo 10

Seja $\mathbf{x} = (1, 2, -5)^\top$

1. $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|1|, |2|, |-5|\} = 5$
2. $\|\mathbf{x}\|_1 = |1| + |2| + |-5| = 8$
3. $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{30} \approx 5.48$

```
y = norm(x,inf);
y = norm(x,1);
y = norm(x,2);
```
(ou simplesmente `norm(x)`)

Normas de Matriz

São exemplos de normas em $\mathcal{M}(m, n)$:

1. norma linha

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} \{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\}$$

Normas de Matriz

São exemplos de normas em $\mathcal{M}(m,n)$:

1. norma linha

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} \{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\}$$

2. norma coluna

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \{\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|\}$$

Normas de Matriz

São exemplos de normas em $\mathcal{M}(m,n)$:

1. norma linha

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} \{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\}$$

2. norma coluna

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \{\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|\}$$

3. norma de Frobenius

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Normas de Matriz

São exemplos de normas em $\mathcal{M}(m,n)$:

1. norma linha

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m}\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\}$$

2. norma coluna

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n}\{\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\}$$

3. norma de Frobenius

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Em particular, essas normas satisfazem a propriedade

$$\boxed{\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|}$$

Normas de Matriz

Exemplo 11

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Normas de Matriz

Exemplo 11

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

1. $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{4, 4, 6\} = 6$

Normas de Matriz

Exemplo 11

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

1. $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{4, 4, 6\} = 6$
2. $\|\mathbf{A}\|_1 = \max\{7, 1, 6\} = 7$

Normas de Matriz

Exemplo 11

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

1. $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{4, 4, 6\} = 6$
2. $\|\mathbf{A}\|_1 = \max\{7, 1, 6\} = 7$
3. $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 + 1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$

Normas de Matriz

Exemplo 11

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

1. $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{4, 4, 6\} = 6$
2. $\|\mathbf{A}\|_1 = \max\{7, 1, 6\} = 7$
3. $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 + 1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$

```
y = norm(A,inf);
y = norm(A,1);
y = norm(A,'fro');
```

Normas de Função

São exemplos de normas em $\mathcal{C}([a,b])$:

1. $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$

2. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$

3. $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Normas de Função

São exemplos de normas em $\mathcal{C}([a,b])$:

1. $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$
2. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$
3. $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Em particular, a norma $\|\cdot\|_2$ provém do produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$$

Normas Equivalentes

Definição (normas equivalentes)

Duas normas $\|\cdot\|_a$ *e* $\|\cdot\|_b$ *são equivalentes, se existirem constantes positivas* c_1 *e* c_2 *tais que*

$$c_1\|\mathbf{x}\|_a \leq \|\mathbf{x}\|_b \leq c_2\|\mathbf{x}\|_a\,, \quad \forall \mathbf{x} \in V\,.$$

Normas Equivalentes

Definição (normas equivalentes)

Duas normas $\|\cdot\|_a$ *e* $\|\cdot\|_b$ *são equivalentes, se existirem constantes positivas* c_1 *e* c_2 *tais que*

$$c_1\|\mathbf{x}\|_a \leq \|\mathbf{x}\|_b \leq c_2\|\mathbf{x}\|_a\,, \quad \forall \mathbf{x} \in V\,.$$

Exemplo 12

Normas equivalentes em $\mathbb{R}^n$:

1. $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty$
2. $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty$
3. $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2$

Normas Equivalentes

Definição (normas equivalentes)

Duas normas $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ são equivalentes, se existirem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$c_1\|\mathbf{x}\|_a \leq \|\mathbf{x}\|_b \leq c_2\|\mathbf{x}\|_a\,, \quad \forall \mathbf{x} \in V\,.$$

Exemplo 12

Normas equivalentes em $\mathbb{R}^n$:

1. $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty$
2. $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty$
3. $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2$

Teorema (equivalência de normas)

Se V é um espaço vetorial de dimensão finita munido de norma, então todas as normas de V são equivalentes.

Normas Consistentes

Definição (normas consistentes)

Uma norma de matriz $\|\cdot\|_m$ *é consistente com uma norma de vetor* $\|\cdot\|_v$ *se*

$$\|\mathbf{Ax}\|_v \leq \|\mathbf{A}\|_m \|\mathbf{x}\|_v \,, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,.$$

Normas Consistentes

Definição (normas consistentes)

Uma norma de matriz $\|\cdot\|_m$ *é consistente com uma norma de vetor* $\|\cdot\|_v$ *se*

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_v \leq \|\mathbf{A}\|_m \|\mathbf{x}\|_v\,, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,.$$

Exemplo 13

Normas consistentes em $\mathcal{M}(m,n)$:

1. $\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_1 \leq \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1$
2. $\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{v}\|_\infty$
3. $\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_F \|\mathbf{v}\|_2$

Distância

Definição (distância)

Uma aplicação $\operatorname{dist} : V \times V \to \mathbb{R}$ *é chamada de distância se:*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dist}(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \operatorname{dist}(\mathbf{w},\mathbf{v}), \quad \forall\, \mathbf{v}\,,\mathbf{w} \in V \\
\operatorname{dist}(\mathbf{v},\mathbf{w}) &\geq 0\,, \quad \forall\, \mathbf{v},\mathbf{w} \in V \\
\operatorname{dist}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w} \\
\operatorname{dist}(\mathbf{v},\mathbf{z}) &\leq \operatorname{dist}(\mathbf{v},\mathbf{w}) + \operatorname{dist}(\mathbf{w},\mathbf{z})\,, \quad \forall\, \mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{z} \in V
\end{aligned}
$$

Distância

Definição (distância)

Uma aplicação $\operatorname{dist} : V \times V \to \mathbb{R}$ *é chamada de distância se:*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dist}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \quad &= \quad \operatorname{dist}(\mathbf{w},\mathbf{v}), \quad \forall\, \mathbf{v}\,,\mathbf{w} \in V \\
\operatorname{dist}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \quad &\geq \quad 0\,, \quad \forall\, \mathbf{v},\mathbf{w} \in V \\
\operatorname{dist}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{w} \\
\operatorname{dist}(\mathbf{v},\mathbf{z}) \quad &\leq \quad \operatorname{dist}(\mathbf{v},\mathbf{w}) + \operatorname{dist}(\mathbf{w},\mathbf{z})\,, \quad \forall\, \mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{z} \in V
\end{aligned}
$$

Teorema

Se $\|\cdot\|$ *é norma, então* $\operatorname{dist}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ *é uma distância.*

Distância

Exemplo 14

São exemplos de distâncias no $\mathbb{R}^n$:

1. $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
2. $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$
3. $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,n} \{|x_i - y_i|\}$

Distância

Exemplo 14

São exemplos de distâncias no $\mathbb{R}^n$:

1. $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
2. $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$
3. $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \{|x_i - y_i|\}$

Exemplo 15

Vejamos como ficaria o *disco unitário* $C = \{\mathbf{p} = (x, y) : \text{dist}(\mathbf{p}, \overline{0}) = 1\}$ em cada uma das distâncias acima:

1. $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$
2. $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$
3. $C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = 1\}$

Distância