

Solução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias

Afonso Paiva
ICMC-USP



- Definição: Uma *equação diferencial ordinária* (EDO) é definida como uma equação que envolve uma função incógnita (y) e algumas de suas derivadas avaliadas em uma única variável independente (x), isto é:

$$y^{(n)}(x) = F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), y^{(3)}(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right)$$

Equação Diferencial Ordinária

- A *ordem de uma equação diferencial* é a mais alta ordem de derivação que aparece na equação.
- Uma EDO é dita *linear* se a função F é escrita como combinação linear de y e de suas derivadas.

Classificação de EDOs

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$



y é função de x e x é a única variável independente. EDO linear de primeira ordem.

$$\frac{d^2y}{dw^2} = x + y^2$$



y e x são funções de w ; w é a única variável independente. EDO não linear de segunda ordem.

$$\frac{d^3y}{dz^3} = z + y' + e^y$$



?

Exemplos de EDOs

- Segunda lei de Newton:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F(x(t))$$

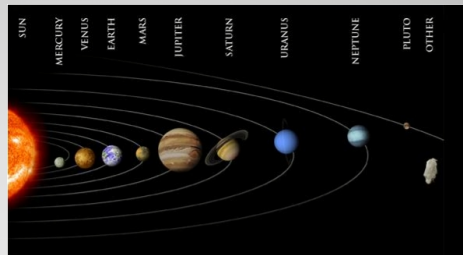
- A posição $x(t)$ de um corpo é uma função em relação ao tempo t (única variável independente).

Motivação

- Magnitude da força gravitacional:

$$F = G \frac{mM}{d^2}$$

- G = constante gravitacional
- M = massa do Sol
- m = massa de um planeta
- d = distância entre o Sol e o planeta



Movimento Planetário

- A solução de uma equação diferencial ordinária é uma função em termos da variável independente que satisfaz a equação. Assim, dada a EDO:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Queremos encontrar uma função $y(x)$ que satisfaça a equação acima.

Solução de uma EDO

- Determinadas EDOs podem ser solucionadas analiticamente, cuja solução é uma expressão explícita.
- Entretanto, isto nem sempre é possível. ☹
- Soluções numéricas são bem vindas!! 😊

Solução Analítica

- Vamos resolver a EDO: $\frac{dy}{dx} = y$

◦ Solução

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow$$

$$\ln(y) + c_1 = x + c_2 \Rightarrow \ln(y) = x + (c_2 - c_1)$$

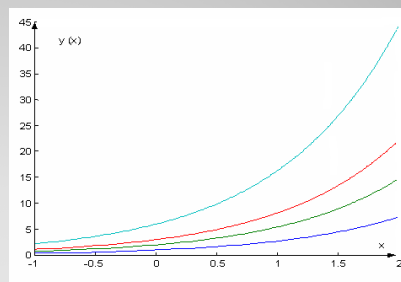
$$y(x) = e^{x+(c_2-c_1)} = e^x e^{(c_2-c_1)}$$

Tomando $k = e^{(c_2-c_1)}$, obtemos:

$$y(x) = ke^x$$

Solução Analítica

- Note que a solução da EDO resulta em uma família de curvas que dependem da constante k .
- Uma solução particular pode ser obtida a partir das condições iniciais do problema.



$$y(x) = ke^x$$

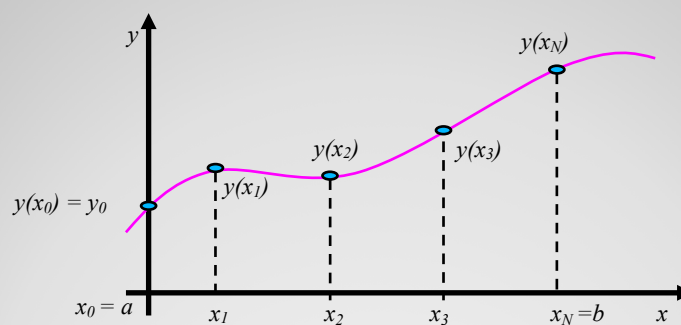
Solução Analítica

- Considere a equação diferencial ordinária de primeira ordem com condição inicial:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [a, b]; \quad x_0 = a$$

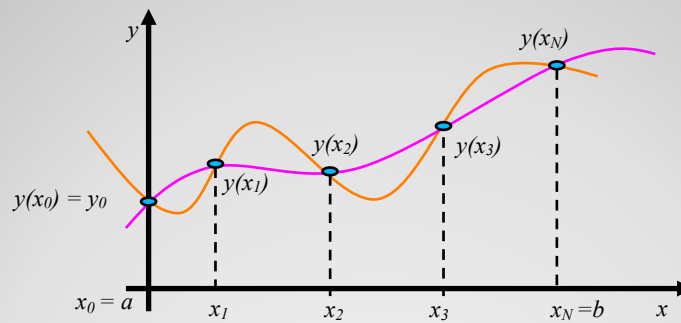
Problema de Valor Inicial (PVI)

- Seja $y(x)$ a solução do PVI, conforme ilustramos abaixo:



Problema de Valor Inicial

- Essa solução sempre vai existir?
- Se existir solução, ela é única?



Problema de Valor Inicial

Seja $f(x,y)$ definida e contínua em:

$$D = \{(x, y) / a \leq x \leq b; -\infty < y < \infty\}$$

Suponhamos que existe uma constante positiva L , tal que:

$$|f(x, y) - f(x, y^*)| \leq L|y - y^*|, \forall (x, y) \in D.$$

Então, se y_0 é um número dado, **existe uma única solução** $y(x)$ do PVI, onde $y(x)$ é derivável para todo $(x, y) \in D$.

Teorema da Existência e Unicidade

- Consideraremos a sequência de pontos $\{x_n\}$ definida por:

$$x_n = x_0 + nh \ ; \ n = 0, \dots, N,$$

$$\text{com } x_0 = a \ , \ x_N = b \text{ e } N = \frac{b-a}{h}$$

- h = tamanho do passo
- x_n = pontos da malha
- N = número de passos

Solução Numérica

- Desejamos obter a solução aproximada do PVI não em um intervalo contínuo $[a,b]$, mas sim em um conjunto discreto de pontos $\{x_n\}$.

- Denotaremos por: y_n uma aproximação para a solução teórica (analítica) em x_n , isto é:

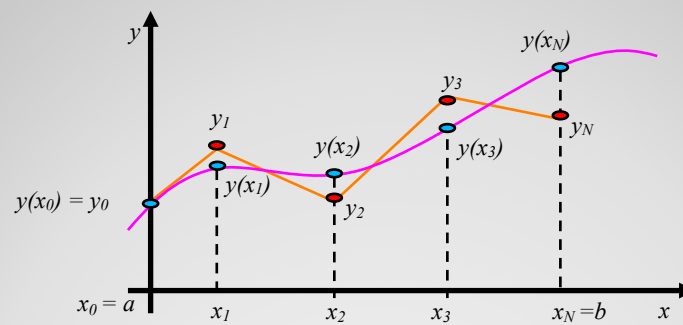
$$y_n = y(x_n) \quad \text{e} \quad f_n = f(x_n, y_n)$$

- Nosso objetivo é determinar aproximações y_n da solução verdadeira $y(x_n)$ nos pontos da malha. Portanto a solução numérica será uma tabela de valores da forma

x_n	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_N
y_n	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_N

Solução Numérica

- Graficamente:



Solução Numérica

- Resumo:

- Na solução numérica não se determina a expressão literal da função $y(x)$, mas sim uma solução aproximada do PVI num conjunto discreto de pontos.
- Captura a evolução (dinâmica) de um sistema.

Solução Numérica

Métodos Baseados na Série de Taylor

- Seja f uma função com derivadas de todas as ordens em algum intervalo contendo a como um ponto interior. Então, a série de Taylor para $f(a+h)$ em torno de a é:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(c)$$

com $c \in (a, a+h)$

Erro de
Truncamento

Série de Taylor

- Desenvolver $f(x) = e^x$ em torno de zero.

$$x = a + h = 0 + h = h$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$$

Segue que:

$$f(x) = f(0 + h) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Exemplo

- Consideremos o PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [a, b]; \quad x_0 = a$$

onde f é contínua e suficientemente derivável em relação a x e y .

Método de Taylor de ordem k

- Seja $y(x)$ a solução exata do PVI. A expansão em série de Taylor para $y(x_n+h)$ em torno de x_n truncando após $(k+1)$ termos é dada por:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \cdots + \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x_n)$$

- Problema: y e suas derivadas não são conhecidas.
- Solução: usar f para determinar as derivadas de y .

Método de Taylor de ordem k

- $y' = f(x, y)$

$$y'' = f' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = f_x + f_y f$$

$$y''' = f'' = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y} y' + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} y' \right) f + f_y \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \right) \Rightarrow$$

$$y''' = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + f_y^2 f$$

assim em diante...

- Note que quanto maior a ordem de derivação mais complexa se torna a derivada total.

Método de Taylor de ordem k

Assim, podemos escrever

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \dots + \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x_n)$$

da seguinte maneira:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2!} f'(x_n, y(x_n)) + \dots + \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(x_n, y(x_n))$$

Substituindo por valores aproximados, temos:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2!} f'_n + \dots + \frac{h^k}{k!} f_n^{(k-1)}$$

Método de Taylor de ordem k

- Os métodos que usam o desenvolvimento em série de Taylor de $y(x)$ teoricamente fornecem solução para qualquer equação diferencial.
- Porém, do ponto de vista computacional, os métodos de Taylor de ordem mais elevada são considerados inaceitáveis pois, o cálculo das derivadas totais envolvidas é extremamente complicado.

Método de Taylor de ordem k

- Resolver o PVI:

$$\begin{cases} y' = -y + x + 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}, \quad x \in [0, 0.3]; \quad h = 0.1$$

Usando o método de Taylor de ordem 3.

Exemplo

- Tomando $k = 3$, temos:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2!} f'_n + \frac{h^3}{3!} f''_n$$

Logo,

$$f = -y + x + 2$$

$$f' = 1 + (-1)(-y + x + 2) = y - x - 1$$

$$f'' = -1 + (1)(-y + x + 2) = -y + x + 1$$

Exemplo - Solução

- Para $n = 0$:

$$y_1 = y_0 + hf_0 + \frac{h^2}{2!} f_0' + \frac{h^3}{3!} f_0''$$

Assim: $(x_0, y_0) = (0, 2)$. Logo,

$$f = -y + x + 2 \Rightarrow f_0 = f(0, 2) = -2 + 0 + 2 = 0$$

$$f' = y - x - 1 \Rightarrow f_0' = f'(0, 2) = 2 - 0 - 1 = 1$$

$$f'' = -y + x + 1 \Rightarrow f_0'' = f''(0, 2) = -2 + 0 + 1 = -1$$

Temos que $h=0.1$. Portanto,

$$y_1 = 2 + (0.1)(0) + \frac{(0.1)^2}{2}(1) + \frac{(0.1)^3}{6}(-1) = 2.0048$$

Exemplo - Solução

- Para $n = 1$:

$$y_2 = y_1 + hf_1 + \frac{h^2}{2!} f_1' + \frac{h^3}{3!} f_1''$$

Como $h=0.1$ então $(x_1, y_1) = (0.1, 2.0048)$. Logo,

$$f = -y + x + 2 \Rightarrow f_1 = f(0.1, 2.0048) = -2.0048 + 0.1 + 2 = 0.0952$$

$$f' = y - x - 1 \Rightarrow f_1' = f'(0.1, 2.0048) = 2.0048 - 0.1 - 1 = 0.9048$$

$$f'' = -y + x + 1 \Rightarrow f_1'' = f''(0.1, 2.0048) = -2.0048 + 0.1 + 1 = -0.9048$$

Portanto,

$$y_2 = 2.0048 + (0.1)(0.0952) + \frac{(0.1)^2}{2}(0.9048) + \frac{(0.1)^3}{6}(-0.9048) = 2.0186$$

Exemplo - Solução

- Para $n = 2$:

$$y_3 = y_2 + hf_2 + \frac{h^2}{2!} f_2' + \frac{h^3}{3!} f_2''$$

Como $h=0.1$ então $(x_2, y_2) = (0.2, 2.0186)$. Logo,

$$f = -y + x + 2 \Rightarrow f_2 = f(0.2, 2.0186) = -2.0186 + 0.2 + 2 = 0.1814$$

$$f' = y - x - 1 \Rightarrow f_2' = f'(0.2, 2.0186) = 2.0186 - 0.2 - 1 = 0.8186$$

$$f'' = -y + x + 1 \Rightarrow f_2'' = f''(0.2, 2.0186) = -2.0186 + 0.2 + 1 = -0.8186$$

Portanto,

$$y_3 = 2.0186 + (0.1)(0.1814) + \frac{(0.1)^2}{2} (0.8186) + \frac{(0.1)^3}{6} (-0.8186) = 2.0406$$

Exemplo - Solução

- Logo, a solução numérica do PVI é:

x_n	0	0.1	0.2	0.3
y_n	2	2.0048	2.0186	2.0406
$y(x_n)$	2	2.00484	2.01873	2.04082

- Solução exata do PVI:

$$y(x) = e^{-x} + x + 1$$

Exemplo - Solução

Métodos de Passo Múltiplo

- **Métodos Explícitos:** utilizam as aproximações $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_0$ para obter y_{n+1} .
- **Métodos Implícitos:** utilizam as aproximações $y_{n+1}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_0$ para obter y_{n+1} .

Classificação dos Métodos

- É o método mais simples de ser obtido, basta tomar $k=1$ no método de Taylor:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n$$

- Método explícito de 1-passo.

Método de Euler

- Resolver o PVI:

$$\begin{cases} y' = -y + x + 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}, \quad x \in [0, 0.3]; \quad h = 0.1$$

Usando o método de Euler.

Exemplo

- Para $n = 0$:

$$y_1 = y_0 + hf_0$$

Assim: $(x_0, y_0) = (0, 2)$. Logo,

$$f = -y + x + 2 \Rightarrow f_0 = f(0, 2) = -2 + 0 + 2 = 0$$

Temos que $h=0.1$. Portanto,

$$y_1 = 2 + (0.1)(0) = 2$$

Exemplo - Solução

- Para $n = 1$:

$$y_2 = y_1 + hf_1$$

Assim: $(x_1, y_1) = (0.1, 2)$. Logo,

$$f = -y + x + 2 \Rightarrow f_1 = f(0.1, 2) = -2 + 0.1 + 2 = 0.1$$

Temos que $h=0.1$. Portanto,

$$y_2 = 2 + (0.1)(0.1) = 2.01$$

Exemplo - Solução

- Para $n = 2$:

$$y_3 = y_2 + hf_2$$

Assim: $(x_2, y_2) = (0.2, 2.01)$. Logo,

$$f = -y + x + 2 \Rightarrow f_0 = f(0.2, 2.01) = -2.01 + 0.2 + 2 = 0.19$$

Temos que $h=0.1$. Portanto,

$$y_3 = 2.01 + (0.1)(0.19) = 2.019$$

Exemplo - Solução

- Logo, a solução do PVI fornecida pelo Método de Euler é:

x_n	0	0.1	0.2	0.3
y_n	2	2	2.01	2.019
$y(x_n)$	2	2.00484	2.01873	2.04082

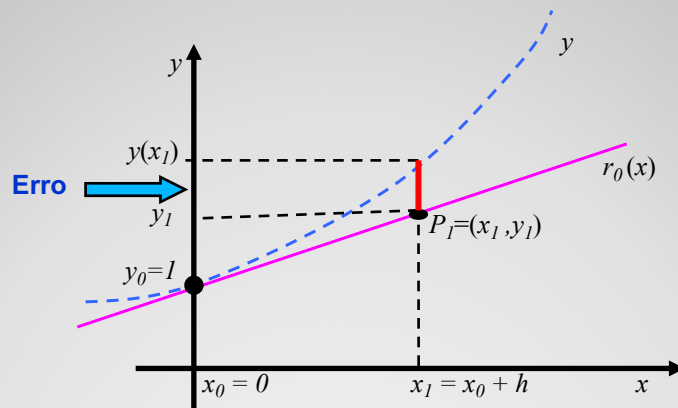
- Solução exata do PVI:

$$y(x) = e^{-x} + x + 1$$

Exemplo - Solução

- Estudo gráfico do erro

$$y_{n+1} = y_n + hf_n$$



Método de Euler

- Dado o PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [a, b]; \quad x_0 = a$$

Vamos desenvolver $y(x_n + h)$ e $y(x_n - h)$ em torno do ponto x_n , isto é:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \dots$$

$$y(x_n - h) = y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \dots$$

Método do Ponto Médio

- Calculando:

$$(-) \begin{cases} y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \dots \\ y(x_n - h) = y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \dots \end{cases}$$

$$y(x_n + h) - y(x_n - h) = 2hy'(x_n) + \cancel{\frac{h^3}{3} y'''(x_n)} + \dots$$

Método do Ponto Médio

- Obtemos:

$$y(x_n + h) - y(x_n - h) = 2hy'(x_n) \Rightarrow y_{n+1} - y_{n-1} = 2hf_n$$

- Finalmente, trocando n por $n + 1$:

$$y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1}$$

- método explícito de 2-passos

Método do Ponto Médio

- Resolver o PVI:

$$\begin{cases} y' = -y + x + 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}, \quad x \in [0, 0.3]; \quad h = 0.1$$

Usando o método do ponto médio. Use o método de Taylor de ordem 2 para obter os valores iniciais.

Exemplo

- Inicialização (Método de Taylor)

- Tomando $k = 2$, temos:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2!} f'_n$$

Logo,

$$f = -y + x + 2$$

$$f' = 1 + (-1)(-y + x + 2) = y - x - 1$$

Exemplo - Solução

- Inicialização ($n = 0$):

$$y_1 = y_0 + hf_0 + \frac{h^2}{2!} f'_0$$

Assim: $(x_0, y_0) = (0, 2)$. Logo,

$$f = -y + x + 2 \Rightarrow f_0 = f(0, 2) = -2 + 0 + 2 = 0$$

$$f' = y - x - 1 \Rightarrow f'_0 = f'(0, 2) = 2 - 0 - 1 = 1$$

Temos que $h=0.1$. Segue que:

$$y_1 = 2 + (0.1)(0) + \frac{(0.1)^2}{2}(1) + \frac{(0.1)^3}{6}(-1) = 2.0048$$

Finalmente,

$$f_1 = f(0.1, 2.0048) = -2.0048 + 0.1 + 2 = 0.0952$$

Exemplo - Solução

- Método do ponto médio para $n = 0$:

$$y_2 = y_0 + 2hf_1 = 2 + 2(0.1)(0.0952) = 2.0190$$

Segue que:

$$f = -y + x + 2$$

$$f_2 = f(x_2, y_2) = f(0.2, 2.0190) = -2.0190 + 0.2 + 2 = 0.1810$$

Exemplo - Solução

- Método do ponto médio para $n = 1$:

$$y_3 = y_1 + 2hf_2 = 2.0048 + 2(0.1)(0.1810) = 2.0412$$

Portanto, a solução numérica do PVI é:

x_n	0	0.1	0.2	0.3
y_n	2	2.0048	2.0190	2.0412
$y(x_n)$	2	2.00484	2.01873	2.04082

Exemplo - Solução

Métodos de Passo Múltiplo via Integração Numérica

- Método de Adams-Bassforth

- método explícito de 2-passos

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x, y) dx$$

- Fazendo uma mudança de variável:

$$x = x_n + uh \Rightarrow dx = hdu$$

e $f \approx P$, polinômio de interpolação de Newton nos pontos x_n e x_{n+1} . Temos,

$$y_{n+2} - y_{n+1} = h \int_1^2 P(u) du$$

Método de Adams-Bassforth

- $$y_{n+2} - y_{n+1} = h \int_1^2 P(u) du$$

- Calculando:

$$P(x) = f_n + (x - x_n)f[x_n, x_{n+1}] \Rightarrow P(u) = f_n + (uh) \frac{f_{n+1} - f_n}{h}$$

- Portanto, $P(u) = f_n + u(f_{n+1} - f_n)$. Logo,

$$y_{n+2} - y_{n+1} = h \int_1^2 P(u) du = \frac{h}{2}(-f_n + 3f_{n+1}) \Rightarrow$$

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(-f_n + 3f_{n+1})$$

Método de Adams-Bassforth

Métodos de Runge-Kutta Explícitos

- são de passo um (auto-iniciantes);
- não exigem o cálculo de derivadas parciais de $f(x,y)$;
- necessitam apenas do cálculo de $f(x,y)$ em determinados pontos (os quais dependem da ordem dos métodos);
- método de Runge-Kutta coincide com a ordem do método de Taylor de mesma ordem.

Métodos de Runge-Kutta Explícitos

- Considere o PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [a, b]; x_0 = a$$

- Forma geral de Runge-Kutta de s estágios:

$$y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n, h), \text{ com}$$

$$F(x_n, y_n, h) = \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

Métodos de Runge-Kutta Explícitos

- Cálculo dos função k_i :

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2, y_n + a_{21}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_n + c_3, y_n + a_{31}hk_1 + a_{32}hk_2)$$

$$\vdots$$

$$k_s = f(x_n + c_s, y_n + a_{s1}hk_1 + a_{s2}hk_2 + \dots + a_{s,s-1}hk_{s-1})$$

e satisfaz

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i, i = 2, \dots, s$$

Forma Geral de Runge-Kutta

- Método de Euler
 - basta tomar $s=1$ e $b_1=1$:

$$y_{n+1} = y_n + hk_1$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

Runge-Kutta de ordem 1

- Para $s=2$:

$$y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n, h)$$

$$F(x_n, y_n, h) = b_1k_1 + b_2k_2$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2h, y_n + a_{21}hk_1)$$

$$a_{21} = c_2$$

Runge-Kutta de ordem 2

- Trocando a_{21} por c_2 em k_2 :

$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + c_2 h f(x_n, y_n))$$

- Expandindo k_2 em série de Taylor em torno do ponto (x_n, y_n) , obtemos:

$$k_2 = f_n + (c_2 h) \frac{\partial f_n}{\partial x} + (c_2 h f_n) \frac{\partial f_n}{\partial y} + O(h^2)$$

Runge-Kutta de ordem 2

- Substituindo k_2 em:

$$F(x_n, y_n, h) = b_1 k_1 + b_2 k_2$$

temos:

$$\begin{aligned} F(x_n, y_n, h) &= b_1 f_n + b_2 \left[f_n + c_2 h \frac{\partial f_n}{\partial x} + c_2 h f_n \frac{\partial f_n}{\partial y} + O(h^2) \right] \\ &= (b_1 + b_2) f_n + b_2 c_2 h \left[\frac{\partial f_n}{\partial x} + f_n \frac{\partial f_n}{\partial y} \right] + O(h^2) \end{aligned}$$

- Chamando:

$$A = \frac{\partial f_n}{\partial x} + f_n \frac{\partial f_n}{\partial y}$$

Runge-Kutta de ordem 2

$$F(x_n, y_n, h) = (b_1 + b_2)f_n + b_2c_2hA + O(h^2)$$

Substituindo em $y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n, h)$

Temos:

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 + b_2)f_n + b_2c_2h^2A + O(h^3)$$

Runge-Kutta de ordem 2

Novamente, pela fórmula de Taylor, temos:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + y'_n h + y''_n \frac{h^2}{2!} + O(h^3) \\ &= y_n + f_n h + \left[\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n \right] \frac{h^2}{2!} + O(h^3) \\ &= y_n + f_n h + A \frac{h^2}{2!} + O(h^3) \end{aligned}$$

Runge-Kutta de ordem 2

Comparando as equações:

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 + b_2)f_n + b_2c_2h^2A + O(h^3)$$

$$y_{n+1} = y_n + f_n h + A \frac{h^2}{2!} + O(h^3)$$

Runge-Kutta de ordem 2

• Temos:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Método de Euler Modificado

$$b_1 = 0 \Rightarrow b_2 = 1 \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{1}{2}$$

Método de Euler Melhorado

$$b_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad c_2 = 1$$

Runge-Kutta de ordem 2

Método de Euler Modificado

$$b_1 = 0 \Rightarrow b_2 = 1 \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{1}{2}$$

Substituindo



$$y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n, h)$$

$$F(x_n, y_n, h) = b_1 k_1 + b_2 k_2$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + c_2 h k_1)$$

Runge-Kutta de ordem 2

$$y_{n+1} = y_n + h k_2$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h k_1\right)$$

Método de Euler Modificado

Método de Euler Melhorado

$$b_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2} \text{ e } c_2 = 1$$

Substituindo



$$y_{n+1} = y_n + hF(x_n, y_n, h)$$

$$F(x_n, y_n, h) = b_1 k_1 + b_2 k_2$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + c_2 h k_1)$$

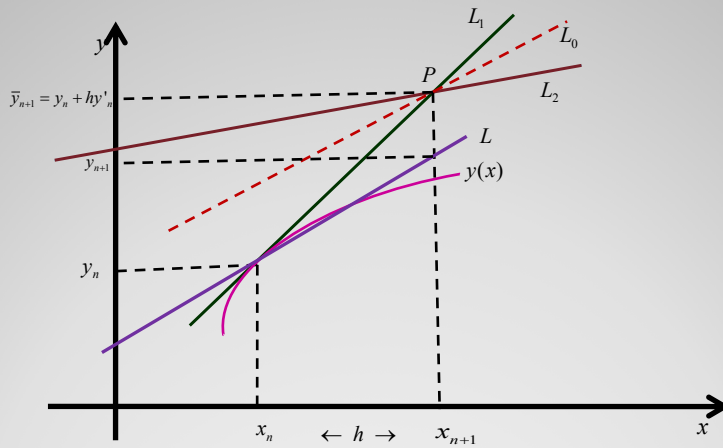
Runge-Kutta de ordem 2

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + h, y_n + h k_1)$$

Método de Euler Melhorado



Método de Euler Melhorado

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} [k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4]$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

Runge-Kutta de ordem 4

EDOs no MATLAB

```
function [X,Y]=euler(func,x0,y0,N,h)
X=zeros(1,N);
Y=X;
X(1)=x0;
Y(1)=y0;
for i=1:N
    Y(i+1) = Y(i) + h*func(X(i),Y(i));
    X(i+1) = X(i) + h;
end
```

M-file: Método de Euler

```

function [X,Y]=rk4(func,x0,y0,N,h)

X=zeros(1,N);
Y=X;
X(1)=x0;
Y(1)=y0;
for i=1:N
    k1 = func(X(i),Y(i));
    k2 = func(X(i)+.5*h,Y(i)+.5*h*k1);
    k3 = func(X(i)+.5*h,Y(i)+.5*h*k2);
    k4 = func(X(i)+h,Y(i)+h*k3);
    Y(i+1) = Y(i) + h*(k1+2*(k2+k3)+k4)/6;
    X(i+1) = X(i) + h;
end

```

M-file: Runge-Kutta de ordem 4

- Resolver o PVI:

$$\begin{cases} y' = -y + x + 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}, \quad N = 10; \quad h = 0.2$$

- Plotar a solução do PVI usando o método de Euler.
- Plotar a solução do PVI usando RK4
- Plotar a solução exata do PVI:

$$y(x) = e^{-x} + x + 1$$

Exemplo - MATLAB

Métodos do Tipo Previsor-Corretor

- A ideia é utilizar um método explícito (**previsor**) para calcular uma aproximação de uma certa quantidade e um método implícito para refinar essa aproximação (**corretor**).

Considere o PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [a, b]; \quad x_0 = a$$

Como calcular y_{n+1} ?

Métodos do Tipo Previsor-Corretor

Aproximamos y_{n+1} através do seguinte processo iterativo.

1. Por meio de um método explícito **P** encontramos:

$$y_{n+1}^{(k)} \approx y_{n+1}$$

2. Calculamos

$$f_{n+1}^{(k)} \approx f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})$$

3. Melhoramos a aproximação de y_{n+1} , utilizando f_{n+1} do passo (2) e um método implícito **C** para obter $y_{n+1}^{(k+1)}$

4. Volte para o passo (2) até que número máximo de iterações seja atingido ou

$$|y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1}^{(k)}| < \varepsilon$$

Métodos do Tipo Previsor-Corretor

Resolver o PVI:

$$\begin{cases} y' = -y + x + 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}, \quad x \in [0, 0.3]; \quad h = 0.1$$

Usando o método previsor-corretor com:

$$\mathbf{P:} \quad y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2} [-f_n + 3f_{n+1}]$$

$$\mathbf{C:} \quad y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{12} [-f_n + 8f_{n+1} + 5f_{n+2}]$$

Use $\varepsilon = 0.002$ e o método de Taylor de ordem 2 para obter os valores iniciais.

Exemplo

- Inicialização (Método de Taylor)

- Tomando $k = 2$, temos:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2!} f'_n$$

Logo,

$$f = -y + x + 2$$

$$f' = 1 + (-1)(-y + x + 2) = y - x - 1$$

Exemplo - Solução

- Inicialização ($n = 0$):

$$y_1 = y_0 + hf_0 + \frac{h^2}{2!} f'_0$$

Assim: $(x_0, y_0) = (0, 2)$. Logo,

$$f = -y + x + 2 \Rightarrow f_0 = f(0, 2) = -2 + 0 + 2 = 0$$

$$f' = y - x - 1 \Rightarrow f'_0 = f'(0, 2) = 2 - 0 - 1 = 1$$

Temos que $h = 0.1$. Segue que:

$$y_1 = 2 + (0.1)(0) + \frac{(0.1)^2}{2}(1) + \frac{(0.1)^3}{6}(-1) = 2.0048$$

Finalmente,

$$f_1 = f(0.1, 2.0048) = -2.0048 + 0.1 + 2 = 0.0952$$

Exemplo - Solução

- Cálculo de $y_2^{(0)}$

P: $y_2^{(0)} = y_1 + \frac{h}{2} [-f_0 + 3f_1]$

Logo,

$$y_2^{(0)} = 2.0048 + \frac{0.1}{2} [0 + 3(0.0952)] = 2.0191$$

- Cálculo de $f_2^{(0)} = f(x_2, y_2^{(0)})$

$$f_2^{(0)} = f(0.2, 2.0191) = -2.0191 + 0.2 + 2 = 0.1809$$

Exemplo - Solução

- Cálculo de $y_2^{(1)}$

C: $y_2^{(1)} = y_1 + \frac{h}{12} [-f_0 + 8f_1 + 5f_2^{(0)}]$

Logo,

$$y_2^{(1)} = 2.0048 + \frac{0.1}{12} [0 + 8(0.0952) + 5(0.1809)] = 2.0187$$

- Cálculo do erro:

$$|y_2^{(1)} - y_2^{(0)}| = 4 \times 10^{-4} < \varepsilon \Rightarrow y_2 = 2.0187$$

- Cálculo de f_2 :

$$f_2 = f(0.2, 2.0187) = -2.0187 + 0.2 + 2 = 0.1813$$

Exemplo - Solução

- Para $n = 1$, calculamos $y_3^{(0)}$

P: $y_3^{(0)} = y_2 + \frac{h}{2} [-f_1 + 3f_2]$

Logo,

$$y_3^{(0)} = 2.0187 + \frac{0.1}{2} [-0.0952 + 3(0.1813)] = 2.0411$$

- Cálculo de $f_3^{(0)} = f(x_3, y_3^{(0)})$

$$f_3^{(0)} = f(0.3, 2.0411) = -2.0411 + 0.3 + 2 = 0.2589$$

Exemplo - Solução

- Cálculo de $y_3^{(1)}$

C: $y_3^{(1)} = y_2 + \frac{h}{12} [-f_1 + 8f_2 + 5f_3^{(0)}]$

Logo,

$$y_3^{(1)} = 2.0187 + \frac{0.1}{12} [-0.0952 + 8(0.1813) + 5(0.2589)] = 2.0408$$

- Cálculo do erro:

$$|y_3^{(1)} - y_3^{(0)}| = 0.0015 < \varepsilon \Rightarrow y_3 = 2.0408$$

Exemplo - Solução

Portanto, a solução numérica do PVI é:



x_n	0	0.1	0.2	0.3
y_n	2	2.0048	2.0187	2.0408
$y(x_n)$	2	2.00484	2.01873	2.04082

Exemplo - Solução

Teorema: Se $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em $[a, b]$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ não se anular em $[a, b]$ temos que

$$y_{n+1}^{(k)} \rightarrow y_{n+1}$$

desde que h satisfaça

$$h < \frac{2}{\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|}$$

Métodos do Tipo Previsor-Corretor

- Dado um Sistema de EDOs de 1ª ordem:

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Sistema de EDOs

- O PVI pode ser escrito na forma vetorial:

$$\begin{cases} Y' &= F(x, Y) \\ Y(x_0) &= Y_0 \end{cases}$$

com

$$Y = (y_1, \dots, y_n)^\top$$

$$Y' = (y_1', \dots, y_n')^\top$$

$$F = (f_1, \dots, f_n)^\top$$

Para resolver, basta aplicar os métodos numéricos na forma vetorial!

Sistema de EDOs

- **Exemplo:** use o Método de Euler para resolver o sistema

$$\begin{cases} z' &= 4z - 3y - x \\ y' &= z \\ z(0) &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}, \quad x \in [0, 0.2], \quad h = 0.1$$

- **Solução:** $Y = (z, y)^\top$?

$$Y_0 = (z_0, y_0)^\top = (0, 1)^\top \quad F = \begin{pmatrix} 4z - 3y - x \\ z \end{pmatrix}$$

$$Y' = (z', y')^\top$$

Sistema de EDOs

- Solução (continuação): Método de Euler,

$$Y_{n+1} = Y_n + hF_n$$



$$\begin{pmatrix} z_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ y_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 4z_n - 3y_n - x_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Sistema de EDOs

- Solução (continuação): para $n = 0$,

$$x_0 = 0, y_0 = 1, z_0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 4z_0 - 3y_0 - x_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sistema de EDOs

- Solução (continuação): para $n = 1$,

$$x_1 = 0.1, y_1 = 1, z_1 = -0.3$$

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 4z_1 - 3y_1 - x_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} -4.3 \\ -0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.73 \\ 0.97 \end{pmatrix}$$

Sistema de EDOs

- Solução (continuação): portanto,

x_n	0	0.1	0.2
y_n	1	1	0.97
z_n	0	-0.3	-0.73

Sistema de EDOs

Dada uma EDO de ordem n :

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n-1)})$$

Com condições iniciais:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

Como resolver essa equação para obter $\mathbf{y}$?

Resp: transformar em um sistema de 1ª ordem!

EDOs de alta ordem

Vamos supor $n = 2$. Logo,

$$\begin{cases} y'' &= f(x, y, y') \\ y'(x_0) &= y'_0 \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Para transformar a equação acima em um sistema de 1ª ordem, vamos fazer a seguinte **mudança de variável**:

$$y' = z$$

EDOs de alta ordem

Portanto,

$$\begin{cases} z' &= f(x, y, z) \\ y' &= z \\ z(x_0) &= z_0 \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

EDOs de alta ordem

Exemplo: use o Método de Euler para resolver

$$\begin{cases} y'' &= 4y' - 3y - x \\ y'(0) &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}, x \in [0, 0.2], h = 0.1$$

Solução: fazendo $y' = z$ temos

$$\begin{cases} z' &= 4z - 3y - x \\ y' &= z \\ z(0) &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}, x \in [0, 0.2], h = 0.1$$

A solução segue pelo exemplo anterior.

EDOs de alta ordem

Exemplo: dada a equação

$$\begin{cases} y^{(3)} &= 2y'' + xy' - ye^x + 1 \\ y''(0) &= 3 \\ y'(0) &= 1 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Transforme a EDO acima em um sistema de 1ª ordem

EDOs de alta ordem

Solução: fazendo

$$y' = z, \quad z' = w$$

Temos

$$\begin{cases} w' &= 2w + xz - ye^x + 1 \\ z' &= w \\ y' &= z \\ w(0) &= 3 \\ z(0) &= 1 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

EDOs de alta ordem