

Introdução à Modelagem Matemática – SME0241

Pagerank

Afonso Paiva
ICMC-USP

3 de dezembro de 2024

Motivação: Pagerank

Medida de relevância de uma página web (Brin & Page, 1998).

► ordenação dos resultados de uma busca no Google

The screenshot shows a Google search results page for the query "icmc-usp são carlos". The search bar at the top displays the query and the Google logo. Below the search bar, there are tabs for "All", "Maps", "Images", "News", "Videos", and "More". The "All" tab is selected. The search results are displayed in a grid-like format. On the left side, there are several search results, including a link to the ICMC-USP website, a link to the ICMC-USP Facebook page, a link to the ICMC-USP YouTube channel, and a link to a YouTube video about graduation in Mathematics. On the right side, there is a large result for "ICMC - São Carlos", which includes a map, a photo of the building, and a description of the university. The result for "ICMC - São Carlos" is a public university located at Av. Trabalhador São-Carlense, 400 - Centro, São Carlos - SP, 13505-550, Brazil. It has a phone number of +55 16 3373-9700. There are 25 Google reviews for this university. Below the main result, there are several "People also search for" suggestions, including "USP São Carlos", "Universidade Federal de São Carlos", "Teatro da USP", "Auto Escola São Carlos", and "Auto Escola Santo Antônio".

Google icmc-usp são carlos

About 114,000 results (0.43 seconds)

ICMC-USP - São Carlos | Instituto de Ciências Matemáticas ...
www.icmc.usp.br • University of São Paulo •
Abertas inscrições para visita monitorada à USP São Carlos (Vila Maís, Prev/Inst ...
ICMC oferece curso preparatório para a Olimpíada Brasileira de Robótica

Pós-graduação 13
Bem-vindos! Aqui você encontra as informações referentes aos ...
Processos Seletivos - Horário do Semestre - Linhas de Pesquisa

Departamentos Case08
O ICMC é composto por quatro departamentos: Departamento ...
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO INSTITUTO DE CIÊNCIAS ...

Matemática Pessoas
Na área de Matemática, a Universidade de São Paulo tem ...
CNPq - PESSOAS ...
More results from uspf.br »

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da ...
https://pt.wikipedia.org/wiki/Instituto_de_Ci%C3%AAncias_Matem%C3%A1ticas_e_de_Computa%C3%A7%C3%A3o_da_Universidade_de_S%C3%A3o_Carlos • Translate this page
Campus, Campus 1 da USP São Carlos - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo ou ICMC ou ICMC-USP é um dos ...

icmc USP - Facebook
www.facebook.com/icmc.usp • School • Translate this page
icmc USP, São Carlos (São Carlos, Brazil), 5433 likes · 391 talking about this. Página oficial do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação ...

ICMC/USP - YouTube
<https://www.youtube.com/user/icmcusp> • Translate this page
Canal do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC, da USP de São Carlos.

Graduação no ICMC-USP São Carlos - YouTube
<https://www.youtube.com/watch?v=ngEagcWFP0>
Mar 22, 2010 - Uploaded by Profrpmpare
Cursos de Graduação oferecidos pelo ICMC-USP-São Carlos - 6 cursos de graduação oferecidos ...

Licenciatura em Matemática ICMC USP São Carlos - Video ...
www.dailymotion.com/video/x2zftc08 Dailymotion •
May 16, 2015
Licenciatura em Matemática ICMC USP São Carlos.

ICMC - São Carlos Website Directions
Public University
Address: Av. Trabalh. São-Carlense, 400 - Centro, São Carlos - SP, 13505-550, Brazil
Phone: +55 16 3373-9700
Suggest an edit

Reviews Write a review Add a photo
25 Google reviews

People also search for View 15+ more
USP São Carlos - University
Universidade Federal de São Carlos - Public University
Teatro da USP - Theater
Auto Escola São Carlos - Driving School
Auto Escola Santo Antônio - Driving School

Feedback

Autovalores e Autovetores

Definição (autovalor e autovetor)

Seja A uma matriz em $\mathcal{M}(n, n)$. Um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é um **autovalor** de A se existir um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, com $v \neq \bar{0}$, tal que:

$$Av = \lambda v.$$

O vetor v é chamado de **autovetor** associado a λ .

Autovalores e Autovetores

Definição (autovalor e autovetor)

Seja A uma matriz em $\mathcal{M}(n, n)$. Um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é um **autovalor** de A se existir um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, com $v \neq \bar{0}$, tal que:

$$Av = \lambda v.$$

O vetor v é chamado de **autovetor** associado a λ .

Como calcular λ ?

Autovalores e Autovetores

Definição (autovalor e autovetor)

Seja A uma matriz em $\mathcal{M}(n, n)$. Um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é um **autovalor** de A se existir um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, com $v \neq \bar{0}$, tal que:

$$Av = \lambda v.$$

O vetor v é chamado de **autovetor** associado a λ .

Como calcular λ ? Através das raízes do **polinômio característico** $P(\lambda)$!

$$Av = \lambda v = \lambda Iv \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = \bar{0} \Leftrightarrow \underbrace{\det(A - \lambda I)}_{P(\lambda)} = 0$$

Autovalores e Autovetores

Definição (autovalor e autovetor)

Seja A uma matriz em $\mathcal{M}(n, n)$. Um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é um **autovalor** de A se existir um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, com $v \neq \bar{0}$, tal que:

$$Av = \lambda v.$$

O vetor v é chamado de **autovetor** associado a λ .

Como calcular λ ? Através das raízes do **polinômio característico** $P(\lambda)$!

$$Av = \lambda v = \lambda Iv \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = \bar{0} \Leftrightarrow \underbrace{\det(A - \lambda I)}_{P(\lambda)} = 0$$

Definição (espectro)

O **espectro** de $A \in \mathcal{M}(n, n)$ é o conjunto formado pelo seus autovalores, isto é, $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

Método das Potências

Seja $A \in \mathcal{M}(n, n)$ diagonalizável, isto é, A possui autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ associados a um conjunto de autovetores $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ L.I. (com $\|v_i\|_2 = 1, \forall i$).

Método das Potências

Seja $A \in \mathcal{M}(n, n)$ diagonalizável, isto é, A possui autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ associados a um conjunto de autovetores $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ L.I. (com $\|v_i\|_2 = 1, \forall i$).

Além disso, vamos assumir que os autovalores estão ordenados da seguinte forma:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Método das Potências

Seja $A \in \mathcal{M}(n, n)$ diagonalizável, isto é, A possui autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ associados a um conjunto de autovetores $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ L.I. (com $\|v_i\|_2 = 1, \forall i$).

Além disso, vamos assumir que os autovalores estão ordenados da seguinte forma:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Objetivo:

- ▶ Calcular o autovalor *dominante* λ_1 e o seu autovetor associado v_1 .

Quociente de Rayleigh

$$\mu(x) = \frac{x \cdot Ax}{\|x\|_2^2}$$

Quociente de Rayleigh

$$\mu(x) = \frac{x \cdot Ax}{\|x\|_2^2}$$

O que acontece quando x é autovetor de A cujo autovalor é λ ?

Quociente de Rayleigh

$$\mu(x) = \frac{x \cdot Ax}{\|x\|_2^2}$$

O que acontece quando x é autovetor de A cujo autovalor é λ ?

$$\mu(x) = \frac{x \cdot Ax}{\|x\|_2^2} = \frac{x \cdot \lambda x}{\|x\|_2^2} = \lambda \frac{\|x\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \lambda$$

Quociente de Rayleigh

$$\mu(x) = \frac{x \cdot Ax}{\|x\|_2^2}$$

O que acontece quando x é autovetor de A cujo autovalor é λ ?

$$\mu(x) = \frac{x \cdot Ax}{\|x\|_2^2} = \frac{x \cdot \lambda x}{\|x\|_2^2} = \lambda \frac{\|x\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \lambda$$

$\mu(x)$ fornece o autovalor associado a x !

Método das Potências

Processo Iterativo

Dado um chute inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (não-nulo), calcule $y^{(0)} = x^{(0)} / \|x^{(0)}\|_2$.

Método das Potências

Processo Iterativo

Dado um chute inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (não-nulo), calcule $y^{(0)} = x^{(0)} / \|x^{(0)}\|_2$.

Para $k = 1, 2, \dots$ faça:

$$x^{(k)} = Ay^{(k-1)}, \quad y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|_2}, \quad \lambda_1^{(k)} = y^{(k)} \cdot Ay^{(k)}$$

Método das Potências

Processo Iterativo

Dado um chute inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (não-nulo), calcule $y^{(0)} = x^{(0)} / \|x^{(0)}\|_2$.

Para $k = 1, 2, \dots$ faça:

$$x^{(k)} = Ay^{(k-1)}, \quad y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|_2}, \quad \lambda_1^{(k)} = y^{(k)} \cdot Ay^{(k)}$$

O vetor $y^{(k)}$ é uma aproximação de v_1 .

Método das Potências

Processo Iterativo

Dado um chute inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (não-nulo), calcule $y^{(0)} = x^{(0)} / \|x^{(0)}\|_2$.

Para $k = 1, 2, \dots$ faça:

$$x^{(k)} = Ay^{(k-1)}, \quad y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|_2}, \quad \lambda_1^{(k)} = y^{(k)} \cdot Ay^{(k)}$$

O vetor $y^{(k)}$ é uma aproximação de v_1 .

Note que pela recursão acima temos:

$$y^{(k)} = \beta^{(k)} A^k x^{(0)} \quad \text{com} \quad \beta^{(k)} = \frac{1}{\prod_{i=0}^k \|x^{(i)}\|_2} = \frac{1}{\|A^k x^{(0)}\|_2}$$

Método das Potências

Convergência

Afirmação: $y^{(k)} \rightarrow \pm v_1$

Método das Potências

Convergência

Afirmção: $y^{(k)} \rightarrow \pm v_1$

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \Rightarrow y^{(0)} = \beta^{(0)} \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \quad \text{com} \quad \beta^{(0)} = \frac{1}{\|x^{(0)}\|_2}$$

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = \beta^{(0)} A \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \beta^{(0)} \sum_{i=1}^n \alpha_i A v_i = \beta^{(0)} \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i$$

$$y^{(1)} = \beta^{(1)} \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i, \quad \text{com} \quad \beta^{(1)} = \frac{1}{\|x^{(0)}\|_2 \|x^{(1)}\|_2}$$

Assim por diante... até o passo k :

$$y^{(k)} = \beta^{(k)} \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i, \quad \text{com} \quad \beta^{(k)} = \frac{1}{\|x^{(0)}\|_2 \cdots \|x^{(k)}\|_2}$$

Método das Potências

Convergência

$$y^{(k)} = \beta^{(k)} \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i = \beta^{(k)} \lambda_1^k \left(\alpha_1 v_1 + \underbrace{\sum_{i=2}^n \alpha_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} v_i}_{r^{(k)}} \right)$$

Como $|\lambda_1| > |\lambda_i| \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_i / \lambda_1)^k = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} r^{(k)} = \bar{0}$, logo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta^{(k)} \lambda_1^k \alpha_1 v_1.$$

Agora precisamos mostrar que $\beta^{(k)} \lambda_1^k \alpha_1 \rightarrow \pm 1$. Por outro lado,

$$\beta^{(k)} = \frac{1}{\|A^k x^{(0)}\|_2} = \frac{1}{\|\lambda_1^k (\alpha_1 v_1 + r^{(k)})\|_2} \quad \text{e} \quad \|v_1\|_2 = 1$$

$$\text{Portanto,} \quad \beta^{(k)} \lambda_1^k \alpha_1 = \frac{\lambda_1^k \alpha_1}{\|\lambda_1^k (\alpha_1 v_1 + r^{(k)})\|_2} \rightarrow \pm 1.$$

Método das Potências

Crítérios de Parada

Dados $\varepsilon > 0$ e $k_{\max} \in \mathbb{N}$, temos:

1. $k = k_{\max}$

Método das Potências

Critérios de Parada

Dados $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$, temos:

1. $k = k_{max}$
2. $|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \varepsilon$

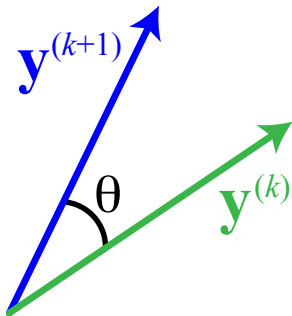
Método das Potências

Crítérios de Parada

Dados $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$, temos:

1. $k = k_{max}$
2. $|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \varepsilon$
3. teste de alinhamento ($|\cos \theta| \approx 1$):

$$||y^{(k+1)} \cdot y^{(k)}| - 1| < \varepsilon$$



Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^T$ como chute inicial.

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^T$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^T$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)} / \|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^T$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)} / \|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$\text{erro} = | |y^{(1)} \cdot y^{(0)}| - 1 | = 0.6838 > \varepsilon$$

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^T$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)} / \|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$\text{erro} = | |y^{(1)} \cdot y^{(0)}| - 1 | = 0.6838 > \varepsilon$$

$$x^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\sqrt{10}/10 \\ 9\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^T$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)} / \|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$\text{erro} = |y^{(1)} \cdot y^{(0)}| - 1 = 0.6838 > \varepsilon$$

$$x^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\sqrt{10}/10 \\ 9\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(2)} = x^{(2)} / \|x^{(2)}\|_2 = \begin{bmatrix} 7\sqrt{130}/130 \\ 9\sqrt{130}/130 \end{bmatrix}$$

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^T$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)} / \|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$erro = |y^{(1)} \cdot y^{(0)}| - 1 = 0.6838 > \varepsilon$$

$$x^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\sqrt{10}/10 \\ 9\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(2)} = x^{(2)} / \|x^{(2)}\|_2 = \begin{bmatrix} 7\sqrt{130}/130 \\ 9\sqrt{130}/130 \end{bmatrix}$$

$$erro = |y^{(2)} \cdot y^{(1)}| - 1 = 0.0570 < \varepsilon$$

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^T$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)} / \|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$erro = |y^{(1)} \cdot y^{(0)}| - 1 = 0.6838 > \varepsilon$$

$$x^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\sqrt{10}/10 \\ 9\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(2)} = x^{(2)} / \|x^{(2)}\|_2 = \begin{bmatrix} 7\sqrt{130}/130 \\ 9\sqrt{130}/130 \end{bmatrix}$$

$$erro = |y^{(2)} \cdot y^{(1)}| - 1 = 0.0570 < \varepsilon \Rightarrow \lambda_1 \approx \lambda_1^{(2)} = y^{(2)} \cdot Ay^{(2)} = 4.0462$$

Aplicação: Pagerank

Processo Estocástico

Definição (vetor estocástico)

Um vetor $p \in \mathbb{R}^n$ com $p_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ é chamado de *estocástico*.

Aplicação: Pagerank

Processo Estocástico

Definição (vetor estocástico)

Um vetor $p \in \mathbb{R}^n$ com $p_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ é chamado de **estocástico**.

Definição (matriz estocástica)

Uma matriz $A \in \mathcal{M}(n, n)$ cujos vetores coluna são estocásticos é chamada de **matriz estocástica**.

Aplicação: Pagerank

Processo Estocástico

Definição (vetor estocástico)

Um vetor $p \in \mathbb{R}^n$ com $p_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ é chamado de **estocástico**.

Definição (matriz estocástica)

Uma matriz $A \in \mathcal{M}(n, n)$ cujos vetores coluna são estocásticos é chamada de **matriz estocástica**.

Proposição

Se $A \in \mathcal{M}(n, n)$ e $p \in \mathbb{R}^n$ são estocásticos então:

1. o vetor $Ap \in \mathbb{R}^n$ é estocástico;
2. $\lambda = 1$ é um autovalor de A .

Aplicação: Pagerank

Matriz Estocástica

Processo de Markov

- Dada uma matriz estocástica A e um distribuição de probabilidade $p^{(t)}$ no tempo t , podemos descobrir a distribuição no tempo $t + k$:

$$p^{(t+k)} = A^k p^{(t)} .$$

Aplicação: Pagerank

Matriz Estocástica

Processo de Markov

- Dada uma matriz estocástica A e um distribuição de probabilidade $p^{(t)}$ no tempo t , podemos descobrir a distribuição no tempo $t + k$:

$$p^{(t+k)} = A^k p^{(t)}.$$

Exemplo 4

Em uma cidade têm pessoas que só ficam em 3 estados: 1 (magra), 2 (gorda) e 3 (sarada). A distribuição inicial é dada por $p^{(0)} = (1/3, 1/3, 1/3)^T$, suponha que a matriz estocástica seja

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Pagerank

Matriz Estocástica

Processo de Markov

- Dada uma matriz estocástica A e um distribuição de probabilidade $p^{(t)}$ no tempo t , podemos descobrir a distribuição no tempo $t + k$:

$$p^{(t+k)} = A^k p^{(t)}.$$

Exemplo 4

Em uma cidade têm pessoas que só ficam em 3 estados: 1 (magra), 2 (gorda) e 3 (sarada). A distribuição inicial é dada por $p^{(0)} = (1/3, 1/3, 1/3)^T$, suponha que a matriz estocástica seja

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \implies p^{(1)} = Ap^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Pagerank

Teorema de Perron-Frobenius

Teorema (Perron-Frobenius)

Seja $A \in \mathcal{M}(n, n)$ uma matriz estocástica, então:

1. $\lambda = 1$ é o autovalor dominante de A ;
2. O autovetor v associado a λ possui todas entradas positivas ou negativas. Em particular, para λ existe um único autovetor que é estocástico.

Aplicação: Pagerank

Teorema de Perron-Frobenius

Teorema (Perron-Frobenius)

Seja $A \in \mathcal{M}(n, n)$ uma matriz estocástica, então:

1. $\lambda = 1$ é o autovalor dominante de A ;
2. O autovetor v associado a λ possui todas entradas positivas ou negativas. Em particular, para λ existe um único autovetor que é estocástico.

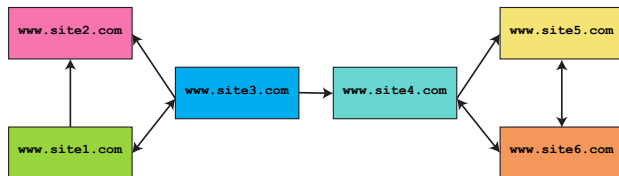
Portanto, a convergência do Processo de Markov é assegurada graças ao **Método das Potências**, isto é,

$$p^{(k)} \rightarrow v.$$

O autovetor v é chamado de **vetor estacionário** de A .

Aplicação: Pagerank

www

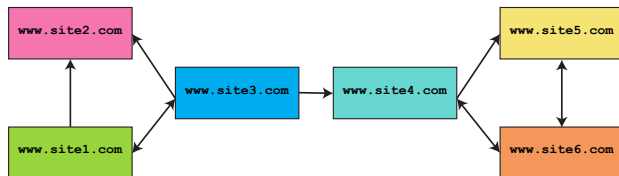


Páginas da web podem ser representadas como um grafo direcionado.

- ▶ uma página é importante se páginas importantes têm *link* para ela;
- ▶ eleição: um link de $A \rightarrow B$ é um voto de A para B ;

Aplicação: Pagerank

www

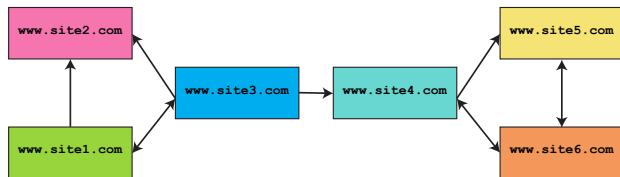


Páginas da web podem ser representadas como um grafo direcionado.

- ▶ uma página é importante se páginas importantes têm *link* para ela;
- ▶ eleição: um link de $A \rightarrow B$ é um voto de A para B ;
- ▶ **visão probabilística do Pagerank**: é a probabilidade de uma página web ser visitada em certo instante de tempo durante um passeio aleatório infinito.

Aplicação: Pagerank

www



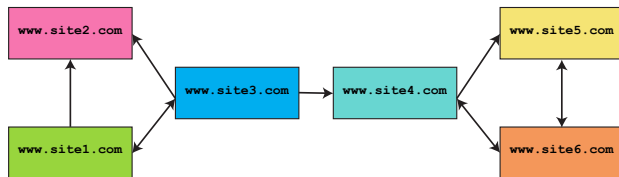
Um grafo direcionado pode ser representado por uma matriz de conectividade:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se tem link } j \rightarrow i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Pagerank

www



Agora precisamos transformar A em uma “matriz estocástica” P:

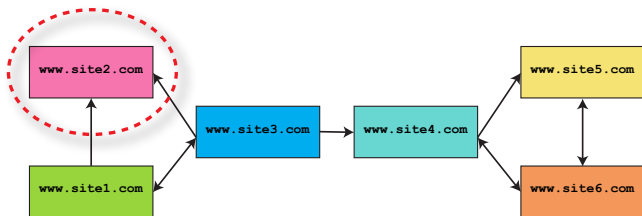
$$p_{ij} = \begin{cases} a_{ij}/c_j & \text{se } c_j \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{com } c_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Pagerank

WWW

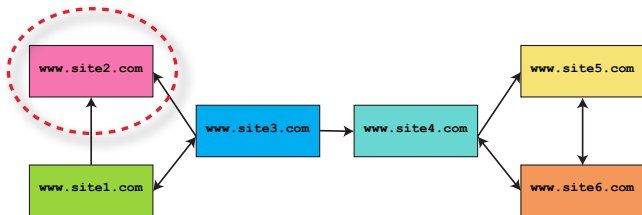


Para resolver os “becos sem saída” precisamos de um vetor $d \in \mathbb{R}^n$:

$$d_j = \begin{cases} 1/n & \text{se } c_j = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$
$$\mathbb{1} = [1, \dots, 1]^\top \in \mathbb{R}^n$$
$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{1}d^\top$$

Aplicação: Pagerank

WWW

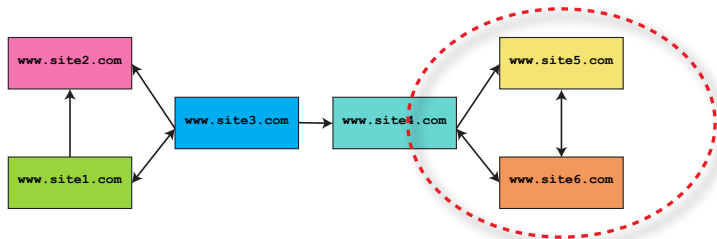


Para resolver os “becos sem saída” precisamos de um vetor $d \in \mathbb{R}^n$:

$$d_j = \begin{cases} 1/n & \text{se } c_j = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$
$$\mathbb{1} = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$$
$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Pagerank

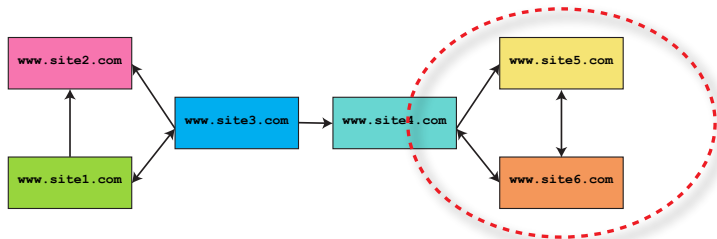
www



Agora precisamos evitar ciclos no grafo modificando S de modo a tornar o grafo irredutível:

$$G = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^\top}{n}$$

Aplicação: Pagerank
www

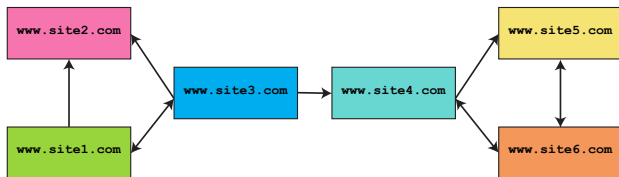


Agora precisamos evitar ciclos no grafo modificando S de modo a tornar o grafo irredutível:

[illegible]

Aplicação: Pagerank

www



Matriz Google:

$$G = \alpha(A + \mathbf{1}\mathbf{d}^T) + (1 - \alpha) \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n}$$

Originalmente o valor escolhido para o peso foi $\alpha = 0.85$.



a função `eigs` em `scipy.sparse.linalg` calcula os k autovalores e autovetores de uma matriz quadrada.