

Introdução à Modelagem Matemática – SME0241

Pagerank

Afonso Paiva
ICMC-USP

3 de dezembro de 2024

Motivação: Pagerank

Medida de relevância de uma página web (Brin & Page, 1998).

- ordenação dos resultados de uma busca no Google

The screenshot shows a Google search results page with the query "icmc-usp são carlos". The results are as follows:

- ICMC-USP - São Carlos | Instituto de Ciências Matemáticas ...**
www.icmc.usp.br • University of São Paulo •
Abertas inscrições para visita monitorada à USP São Carlos | Veja Mais. PrevNext...
ICMC oferece curso preparatório para a Olimpíada Brasileira de Robótica.
- Pos_graduacao**
Bem vindos! Aqui você encontra as informações referentes aos ...
- Departamentos**
O ICMC é composto por quatro Departamentos - Departamento ...
- Matemática**
Na área da Matemática, a Universidade de São Paulo tem ...
More results from usp.br x
- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da ...**
https://www.usp.br/.../icmc ... • Translate this page ...
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da USP São Carlos | Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da USP São Carlos | ICMC-USP é um dos ...
- icmc Us - Facebook**
www.facebook.com/... • School • Translate this page
Icmc Us, São Carlos (São Carlos, Brazil) • 5433 likes · 381 talking about this. Página oficial do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC, da USP de São Carlos.
- ICMC/USP - YouTube**
https://www.youtube.com/user/icmcusp • Translate this page
Canal do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC, da USP de São Carlos.
- Graduação no ICMC-USP São Carlos - YouTube**
https://www.youtube.com/watch?v=vrnpEag0WFO
• Published on Feb 22, 2019 • Updated by Prof. Dr. Geraldo de Oliveira
Cursos de Graduação oferecidos pelo ICMC-USP São Carlos - 6 cursos de graduação oferecidos ...
- Licenciatura em Matemática ICMC USP São Carlos - Video ...**
www.dailymotion.com/video/x2qfbcl Dailymotion •
May 18, 2015
Licenciatura em Matemática ICMC USP São Carlos.

On the right side of the search results, there is a detailed information panel for the "ICMC - São Carlos" result, including a thumbnail image of the building, a map showing its location, and a "View 15+ more" link.

Autovalores e Autovetores

Definição (autovalor e autovetor)

Seja A uma matriz em $\mathcal{M}(n, n)$. Um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é um **autovalor** de A se existir um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, com $v \neq \bar{0}$, tal que:

$$Av = \lambda v.$$

O vetor v é chamado de **autovetor** associado a λ .

Autovalores e Autovetores

Definição (autovalor e autovetor)

Seja A uma matriz em $\mathcal{M}(n, n)$. Um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é um **autovalor** de A se existir um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, com $v \neq \bar{0}$, tal que:

$$Av = \lambda v.$$

O vetor v é chamado de **autovetor** associado a λ .

Como calcular λ ?

Autovalores e Autovetores

Definição (autovalor e autovetor)

Seja A uma matriz em $\mathcal{M}(n, n)$. Um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é um **autovalor** de A se existir um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, com $v \neq \bar{0}$, tal que:

$$Av = \lambda v.$$

O vetor v é chamado de **autovetor** associado a λ .

Como calcular λ ? Através das raízes do **polinômio característico** $P(\lambda)$!

$$Av = \lambda v = \lambda I v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = \bar{0} \Leftrightarrow \underbrace{\det(A - \lambda I)}_{P(\lambda)} = 0$$

Autovalores e Autovetores

Definição (autovalor e autovetor)

Seja A uma matriz em $\mathcal{M}(n, n)$. Um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é um **autovalor** de A se existir um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, com $v \neq \bar{0}$, tal que:

$$Av = \lambda v.$$

O vetor v é chamado de **autovetor** associado a λ .

Como calcular λ ? Através das raízes do **polinômio característico** $P(\lambda)$!

$$Av = \lambda v = \lambda I v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = \bar{0} \Leftrightarrow \underbrace{\det(A - \lambda I)}_{P(\lambda)} = 0$$

Definição (espectro)

O **espectro** de $A \in \mathcal{M}(n, n)$ é o conjunto formado pelo seus autovalores, isto é, $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

Método das Potências

Seja $A \in \mathcal{M}(n, n)$ diagonalizável, isto é, A possui autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ associados a um conjunto de autovetores $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ L.I. (com $\|v_i\|_2 = 1, \forall i$).

Método das Potências

Seja $A \in \mathcal{M}(n, n)$ diagonalizável, isto é, A possui autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ associados a um conjunto de autovetores $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ L.I. (com $\|v_i\|_2 = 1, \forall i$).

Além disso, vamos assumir que os autovalores estão ordenados da seguinte forma:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Método das Potências

Seja $A \in \mathcal{M}(n, n)$ diagonalizável, isto é, A possui autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ associados a um conjunto de autovetores $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ L.I. (com $\|v_i\|_2 = 1, \forall i$).

Além disso, vamos assumir que os autovalores estão ordenados da seguinte forma:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

Objetivo:

- ▶ Calcular o autovalor *dominante* λ_1 e o seu autovetor associado v_1 .

Método das Potências

Quociente de Rayleigh

$$\mu(x) = \frac{x \cdot Ax}{\|x\|_2^2}$$

Método das Potências

Quociente de Rayleigh

$$\mu(x) = \frac{x \cdot Ax}{\|x\|_2^2}$$

O que acontece quando x é autovetor de A cujo autovalor é λ ?

Método das Potências

Quociente de Rayleigh

$$\mu(x) = \frac{x \cdot Ax}{\|x\|_2^2}$$

O que acontece quando x é autovetor de A cujo autovalor é λ ?

$$\mu(x) = \frac{x \cdot Ax}{\|x\|_2^2} = \frac{x \cdot \lambda x}{\|x\|_2^2} = \lambda \frac{\|x\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \lambda$$

Método das Potências

Quociente de Rayleigh

$$\mu(x) = \frac{x \cdot Ax}{\|x\|_2^2}$$

O que acontece quando x é autovetor de A cujo autovalor é λ ?

$$\mu(x) = \frac{x \cdot Ax}{\|x\|_2^2} = \frac{x \cdot \lambda x}{\|x\|_2^2} = \lambda \frac{\|x\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \lambda$$

$\mu(x)$ fornece o autovalor associado a x !

Método das Potências

Processo Iterativo

Dado um chute inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (não-nulo), calcule $y^{(0)} = x^{(0)} / \|x^{(0)}\|_2$.

Método das Potências

Processo Iterativo

Dado um chute inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (não-nulo), calcule $y^{(0)} = x^{(0)} / \|x^{(0)}\|_2$.

Para $k = 1, 2, \dots$ faça:

$$x^{(k)} = Ay^{(k-1)}, \quad y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|_2}, \quad \lambda_1^{(k)} = y^{(k)} \cdot Ay^{(k)}$$

Método das Potências

Processo Iterativo

Dado um chute inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (não-nulo), calcule $y^{(0)} = x^{(0)} / \|x^{(0)}\|_2$.

Para $k = 1, 2, \dots$ faça:

$$x^{(k)} = Ay^{(k-1)}, \quad y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|_2}, \quad \lambda_1^{(k)} = y^{(k)} \cdot Ay^{(k)}$$

O vetor $y^{(k)}$ é uma aproximação de v_1 .

Método das Potências

Processo Iterativo

Dado um chute inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (não-nulo), calcule $y^{(0)} = x^{(0)} / \|x^{(0)}\|_2$.

Para $k = 1, 2, \dots$ faça:

$$x^{(k)} = Ay^{(k-1)}, \quad y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|_2}, \quad \lambda_1^{(k)} = y^{(k)} \cdot Ay^{(k)}$$

O vetor $y^{(k)}$ é uma aproximação de v_1 .

Note que pela recursão acima temos:

$$y^{(k)} = \beta^{(k)} \mathbf{A}^k x^{(0)} \quad \text{com} \quad \beta^{(k)} = \frac{1}{\prod_{i=0}^k \|x^{(i)}\|_2} = \frac{1}{\|\mathbf{A}^k x^{(0)}\|_2}$$

Método das Potências

Convergência

Afirmção: $y^{(k)} \rightarrow \pm v_1$

Método das Potências

Convergência

Afirmção: $y^{(k)} \rightarrow \pm v_1$

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \Rightarrow y^{(0)} = \beta^{(0)} \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \quad \text{com} \quad \beta^{(0)} = \frac{1}{\|x^{(0)}\|_2}$$

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = \beta^{(0)} A \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \beta^{(0)} \sum_{i=1}^n \alpha_i Av_i = \beta^{(0)} \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i$$

$$y^{(1)} = \beta^{(1)} \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i, \quad \text{com} \quad \beta^{(1)} = \frac{1}{\|x^{(0)}\|_2 \|x^{(1)}\|_2}$$

Assim por diante... até o passo k :

$$y^{(k)} = \beta^{(k)} \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i, \quad \text{com} \quad \beta^{(k)} = \frac{1}{\|x^{(0)}\|_2 \cdots \|x^{(k)}\|_2}$$

Método das Potências

Convergência

$$y^{(k)} = \beta^{(k)} \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i = \beta^{(k)} \lambda_1^k \left(\alpha_1 v_1 + \underbrace{\sum_{i=2}^n \alpha_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} v_i}_{r^{(k)}} \right)$$

Como $|\lambda_1| > |\lambda_i| \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_i / \lambda_1)^k = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} r^{(k)} = \bar{0}$, logo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta^{(k)} \lambda_1^k \alpha_1 v_1.$$

Agora precisamos mostrar que $\beta^{(k)} \lambda_1^k \alpha_1 \rightarrow \pm 1$. Por outro lado,

$$\beta^{(k)} = \frac{1}{\|A^k x^{(0)}\|_2} = \frac{1}{\|\lambda_1^k (\alpha_1 v_1 + r^{(k)})\|_2} \quad \text{e} \quad \|v_1\|_2 = 1$$

$$\text{Portanto, } \beta^{(k)} \lambda_1^k \alpha_1 = \frac{\lambda_1^k \alpha_1}{\|\lambda_1^k (\alpha_1 v_1 + r^{(k)})\|_2} \rightarrow \pm 1.$$

Método das Potências

Critérios de Parada

Dados $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$, temos:

1. $k = k_{max}$

Método das Potências

Critérios de Parada

Dados $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$, temos:

1. $k = k_{max}$
2. $|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \varepsilon$

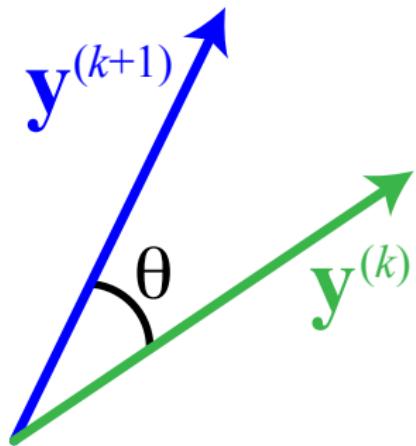
Método das Potências

Critérios de Parada

Dados $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$, temos:

1. $k = k_{max}$
2. $|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \varepsilon$
3. teste de alinhamento ($|\cos \theta| \approx 1$):

$$| |y^{(k+1)} \cdot y^{(k)}| - 1 | < \varepsilon$$



Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^T$ como chute inicial.

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^T$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^\top$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)} / \|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^\top$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)} / \|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$erro = | |y^{(1)} \cdot y^{(0)}| - 1 | = 0.6838 > \varepsilon$$

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^\top$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)} / \|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$erro = | |y^{(1)} \cdot y^{(0)}| - 1 | = 0.6838 > \varepsilon$$

$$x^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\sqrt{10}/10 \\ 9\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^\top$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)} / \|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$erro = | |y^{(1)} \cdot y^{(0)}| - 1 | = 0.6838 > \varepsilon$$

$$x^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\sqrt{10}/10 \\ 9\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(2)} = x^{(2)} / \|x^{(2)}\|_2 = \begin{bmatrix} 7\sqrt{130}/130 \\ 9\sqrt{130}/130 \end{bmatrix}$$

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^\top$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)} / \|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$erro = | |y^{(1)} \cdot y^{(0)}| - 1 | = 0.6838 > \varepsilon$$

$$x^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\sqrt{10}/10 \\ 9\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(2)} = x^{(2)} / \|x^{(2)}\|_2 = \begin{bmatrix} 7\sqrt{130}/130 \\ 9\sqrt{130}/130 \end{bmatrix}$$

$$erro = | |y^{(2)} \cdot y^{(1)}| - 1 | = 0.0570 < \varepsilon$$

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^\top$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)} / \|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$erro = | |y^{(1)} \cdot y^{(0)}| - 1 | = 0.6838 > \varepsilon$$

$$x^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\sqrt{10}/10 \\ 9\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(2)} = x^{(2)} / \|x^{(2)}\|_2 = \begin{bmatrix} 7\sqrt{130}/130 \\ 9\sqrt{130}/130 \end{bmatrix}$$

$$erro = | |y^{(2)} \cdot y^{(1)}| - 1 | = 0.0570 < \varepsilon \Rightarrow \lambda_1 \approx \lambda_1^{(2)} = y^{(2)} \cdot Ay^{(2)} = 4.0462$$

Aplicação: Pagerank

Processo Estocástico

Definição (vetor estocástico)

Um vetor $p \in \mathbb{R}^n$ com $p_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ é chamado de **estocástico**.

Aplicação: Pagerank

Processo Estocástico

Definição (vetor estocástico)

Um vetor $p \in \mathbb{R}^n$ com $p_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ é chamado de **estocástico**.

Definição (matriz estocástica)

Uma matriz $A \in \mathcal{M}(n, n)$ cujos vetores coluna são estocásticos é chamada de **matriz estocástica**.

Aplicação: Pagerank

Processo Estocástico

Definição (vetor estocástico)

Um vetor $p \in \mathbb{R}^n$ com $p_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ é chamado de **estocástico**.

Definição (matriz estocástica)

Uma matriz $A \in \mathcal{M}(n, n)$ cujos vetores coluna são estocásticos é chamada de **matriz estocástica**.

Proposição

Se $A \in \mathcal{M}(n, n)$ e $p \in \mathbb{R}^n$ são estocásticos então:

1. o vetor $Ap \in \mathbb{R}^n$ é estocástico;
2. $\lambda = 1$ é um autovalor de A .

Aplicação: Pagerank

Matriz Estocástica

Processo de Markov

- Dada uma matriz estocástica A e um distribuição de probabilidade $p^{(t)}$ no tempo t , podemos descobrir a distribuição no tempo $t + k$:

$$p^{(t+k)} = A^k p^{(t)} .$$

Aplicação: Pagerank

Matriz Estocástica

Processo de Markov

- Dada uma matriz estocástica A e um distribuição de probabilidade $p^{(t)}$ no tempo t , podemos descobrir a distribuição no tempo $t + k$:

$$p^{(t+k)} = A^k p^{(t)}.$$

Exemplo 4

Em uma cidade têm pessoas que só ficam em 3 estados: 1 (magra), 2 (gorda) e 3 (sarada). A distribuição inicial é dada por $p^{(0)} = (1/3, 1/3, 1/3)^\top$, suponha que a matriz estocástica seja

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Pagerank

Matriz Estocástica

Processo de Markov

- Dada uma matriz estocástica A e um distribuição de probabilidade $p^{(t)}$ no tempo t , podemos descobrir a distribuição no tempo $t + k$:

$$p^{(t+k)} = A^k p^{(t)} .$$

Exemplo 4

Em uma cidade têm pessoas que só ficam em 3 estados: 1 (magra), 2 (gorda) e 3 (sarada). A distribuição inicial é dada por $p^{(0)} = (1/3, 1/3, 1/3)^\top$, suponha que a matriz estocástica seja

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \implies p^{(1)} = Ap^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Pagerank

Teorema de Perron-Frobenius

Teorema (Perron-Frobenius)

Seja $A \in \mathcal{M}(n, n)$ uma matriz estocástica, então:

1. $\lambda = 1$ é o autovalor dominante de A ;
2. O autovetor v associado a λ possui todas entradas positivas ou negativas. Em particular, para λ existe um único autovetor que é estocástico.

Aplicação: Pagerank

Teorema de Perron-Frobenius

Teorema (Perron-Frobenius)

Seja $A \in \mathcal{M}(n, n)$ uma matriz estocástica, então:

1. $\lambda = 1$ é o autovalor dominante de A ;
2. O autovetor v associado a λ possui todas entradas positivas ou negativas. Em particular, para λ existe um único autovetor que é estocástico.

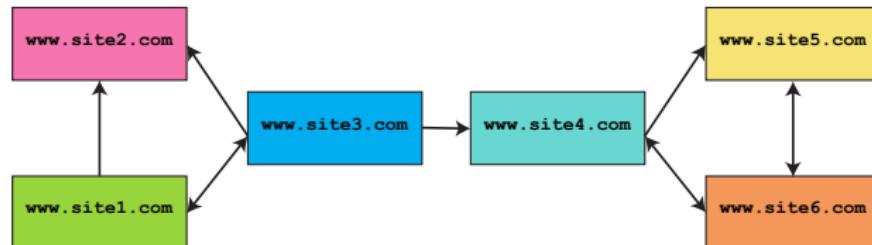
Portanto, a convergência do Processo de Markov é assegurada graças ao **Método das Potências**, isto é,

$$p^{(k)} \rightarrow v.$$

O autovetor v é chamado de **vetor estacionário** de A .

Aplicação: Pagerank

www

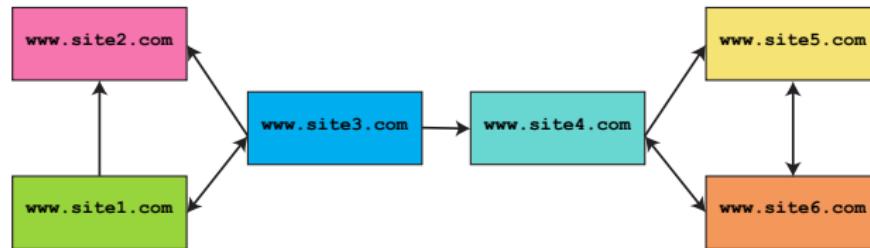


Páginas da web podem ser representadas como um grafo direcionado.

- ▶ uma página é importante se páginas importantes têm *link* para ela;
- ▶ eleição: um link de $A \rightarrow B$ é um voto de A para B ;

Aplicação: Pagerank

WWW

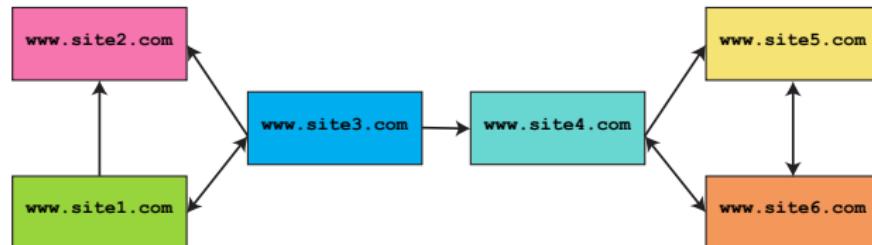


Páginas da web podem ser representadas como um grafo direcionado.

- ▶ uma página é importante se páginas importantes têm *link* para ela;
- ▶ eleição: um link de $A \rightarrow B$ é um voto de A para B ;
- ▶ **visão probabilística do Pagerank:** é a probabilidade de uma página web ser visitada em certo instante de tempo durante um passeio aleatório infinito.

Aplicação: Pagerank

www



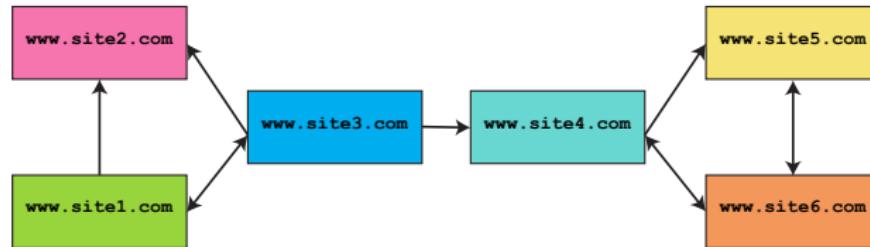
Um grafo direcionado pode ser representado por uma matriz de conectividade:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se tem link } j \rightarrow i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Pagerank

www



Agora precisamos transformar A em uma “matriz estocástica” P:

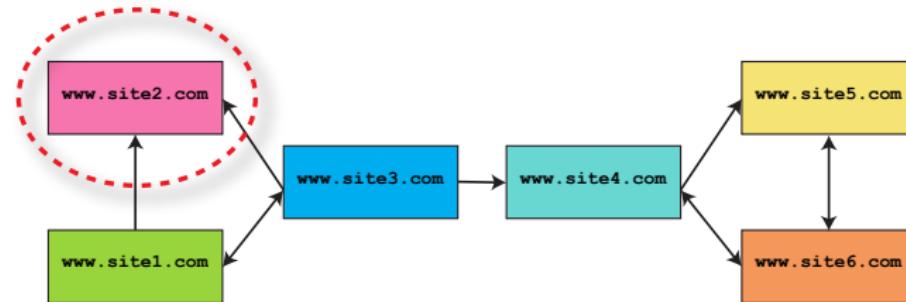
$$p_{ij} = \begin{cases} a_{ij}/c_j & \text{se } c_j \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{com } c_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Pagerank

www



Para resolver os “becos sem saída” precisamos de um vetor $d \in \mathbb{R}^n$:

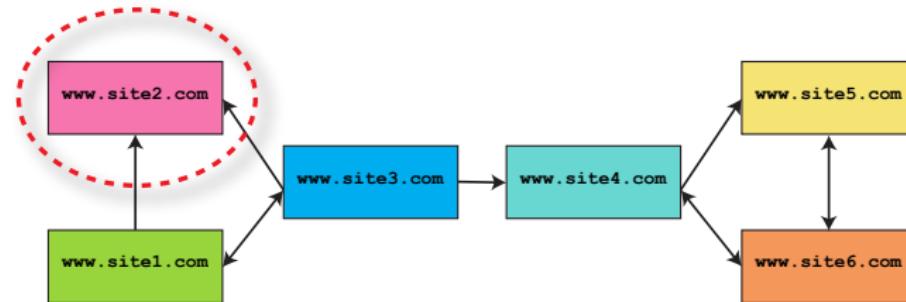
$$d_j = \begin{cases} 1/n & \text{se } c_j = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^\top \in \mathbb{R}^n$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{1}\mathbf{d}^\top$$

Aplicação: Pagerank

www



Para resolver os “becos sem saída” precisamos de um vetor $d \in \mathbb{R}^n$:

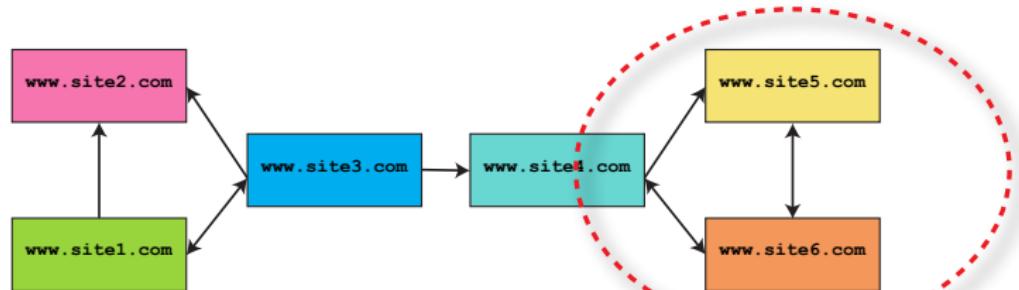
$$d_j = \begin{cases} 1/n & \text{se } c_j = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^\top \in \mathbb{R}^n$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Pagerank

www

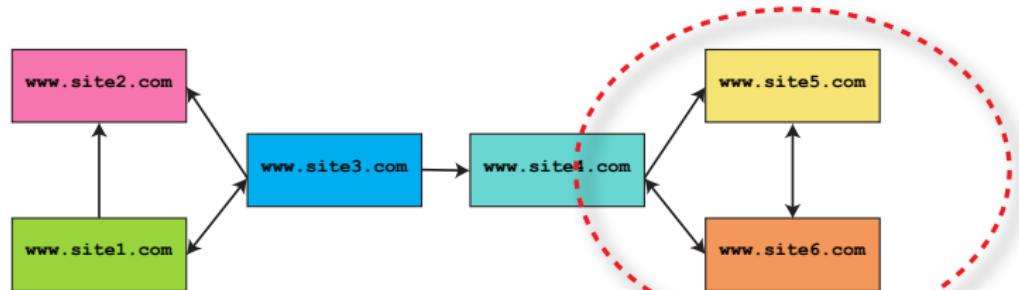


Agora precisamos evitar ciclos no grafo modificando S de modo a tornar o grafo irredutível:

$$G = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + (1 - \alpha) \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{n}$$

Aplicação: Pagerank

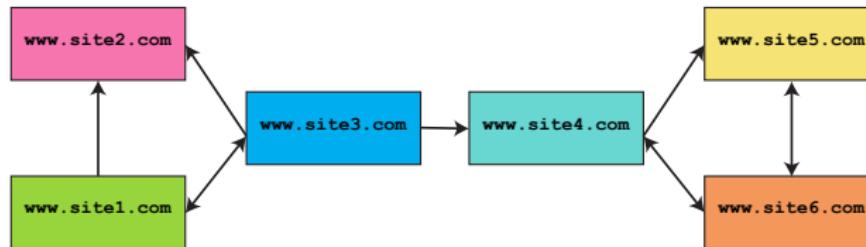
www



Agora precisamos evitar ciclos no grafo modificando S de modo a tornar o grafo irredutível:

Aplicação: Pagerank

www



Matriz Google:

$$G = \alpha(A + \mathbf{1}\mathbf{d}^\top) + (1 - \alpha) \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^\top}{n}$$

Originalmente o valor escolhido para o peso foi $\alpha = 0.85$.



a função `eigs` em `scipy.sparse.linalg` calcula os k autovalores e autovetores de uma matriz quadrada.