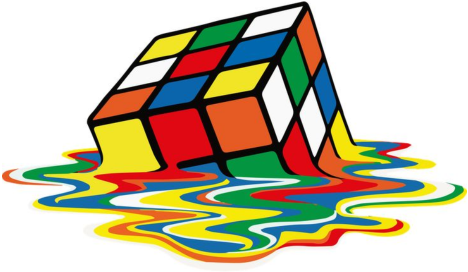


Introdução à Modelagem Matemática – SME0241

Pagerank

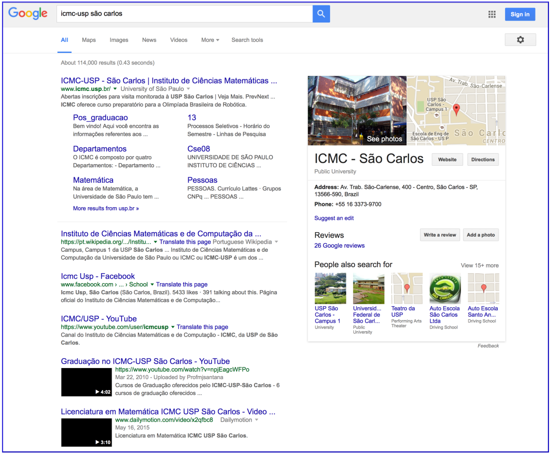
Afonso Paiva
ICMC-USP

3 de dezembro de 2024

Motivação: Pagerank

Medida de relevância de uma página web (Brin & Page, 1998).

- ordenação dos resultados de uma busca no Google



Autovalores e Autovetores

Definição (autovalor e autovetor)

Seja A *uma matriz em* $\mathcal{M}(n, n)$. *Um escalar* $\lambda \in \mathbb{C}$ *é um* *autovalor* *de* A *se existir um vetor* $\mathsf{v} \in \mathbb{R}^n$, *com* $\mathsf{v} \neq \overline{0}$, *tal que:*

$$\mathsf{Av} = \lambda \mathsf{v}\,.$$

O vetor v *é chamado de* *autovetor* *associado a* λ.

Autovalores e Autovetores

Definição (autovalor e autovetor)

Seja A *uma matriz em* $\mathcal{M}(n, n)$. *Um escalar* $\lambda \in \mathbb{C}$ *é um autovalor de* A *se existir um vetor* $\mathsf{v} \in \mathbb{R}^n$, *com* $\mathsf{v} \neq \overline{0}$, *tal que:*

$$\mathsf{A}\mathsf{v} = \lambda \mathsf{v}\,.$$

O vetor v *é chamado de autovetor associado a* λ.

Como calcular λ?

Autovalores e Autovetores

Definição (autovalor e autovetor)

Seja A *uma matriz em* $\mathcal{M}(n,n)$. *Um escalar* $\lambda \in \mathbb{C}$ *é um autovalor de* A *se existir um vetor* $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$, *com* $\mathrm{v} \neq \overline{0}$, *tal que:*

$$\mathrm{Av} = \lambda \mathrm{v}\,.$$

O vetor v *é chamado de autovetor associado a* λ.

Como calcular λ? Através das raízes do polinômio característico $P(\lambda)$!

$$\mathrm{Av} = \lambda \mathrm{v} = \lambda \mathrm{Iv} \;\Leftrightarrow\; (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})\mathrm{v} = \overline{0} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})}_{P(\lambda)} = 0$$

Autovalores e Autovetores

Definição (autovalor e autovetor)

Seja A *uma matriz em* $\mathcal{M}(n, n)$. *Um escalar* $\lambda \in \mathbb{C}$ *é um autovalor de* A *se existir um vetor* $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^n$, *com* $\mathrm{v} \neq \overline{0}$, *tal que:*

$$\mathrm{Av} = \lambda \mathrm{v}\,.$$

O vetor v *é chamado de autovetor associado a* λ.

Como calcular λ? Através das raízes do polinômio característico $P(\lambda)$!

$$\mathrm{Av} = \lambda \mathrm{v} = \lambda \mathrm{Iv} \;\Leftrightarrow\; (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})\mathrm{v} = \overline{0} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})}_{P(\lambda)} = 0$$

Definição (espectro)

O espectro de $\mathrm{A} \in \mathcal{M}(n, n)$ *é o conjunto formado pelo seus autovalores, isto é,* $\Lambda(\mathrm{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.

Método das Potências

Seja A $\in \mathcal{M}(n, n)$ diagonalizável, isto é, A possui autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ associados a um conjunto de autovetores $\{\mathsf{v}_1, \ldots, \mathsf{v}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ L.I. (com $\|\mathsf{v}_i\|_2 = 1\,, \forall i$).

Método das Potências

Seja $A \in \mathcal{M}(n,n)$ diagonalizável, isto é, A possui autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ associados a um conjunto de autovetores $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ L.I. (com $\|v_i\|_2 = 1\,, \forall i$).

Além disso, vamos assumir que os autovalores estão ordenados da seguinte forma:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

Método das Potências

Seja A $\in \mathcal{M}(n,n)$ diagonalizável, isto é, A possui autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ associados a um conjunto de autovetores $\{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ L.I. (com $\|\mathrm{v}_i\|_2 = 1\,, \forall i$).

Além disso, vamos assumir que os autovalores estão ordenados da seguinte forma:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

Objetivo:

- Calcular o autovalor *dominante* λ_1 e o seu autovetor associado v_1.

Quociente de Rayleigh

$$\boxed{\mu(\mathsf{x}) = \frac{\mathsf{x} \cdot \mathsf{A}\mathsf{x}}{\|\mathsf{x}\|_2^2}}$$

Quociente de Rayleigh

$$\boxed{\mu(\mathsf{x}) = \frac{\mathsf{x} \cdot \mathsf{A}\mathsf{x}}{\|\mathsf{x}\|_2^2}}$$

O que acontece quando x é autovetor de A cujo autovalor é λ?

Método das Potências

Quociente de Rayleigh

$$\boxed{\mu(\mathsf{x}) = \frac{\mathsf{x} \cdot \mathsf{A}\mathsf{x}}{\|\mathsf{x}\|_2^2}}$$

O que acontece quando x é autovetor de A cujo autovalor é λ?

$$\mu(\mathsf{x}) = \frac{\mathsf{x} \cdot \mathsf{A}\mathsf{x}}{\|\mathsf{x}\|_2^2} = \frac{\mathsf{x} \cdot \lambda\mathsf{x}}{\|\mathsf{x}\|_2^2} = \lambda\frac{\|\mathsf{x}\|_2^2}{\|\mathsf{x}\|_2^2} = \lambda$$

Método das Potências

Quociente de Rayleigh

$$\boxed{\mu(x) = \frac{x \cdot Ax}{\|x\|_2^2}}$$

O que acontece quando x é autovetor de A cujo autovalor é λ?

$$\mu(x) = \frac{x \cdot Ax}{\|x\|_2^2} = \frac{x \cdot \lambda x}{\|x\|_2^2} = \lambda \frac{\|x\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \lambda$$

$\mu(x)$ fornece o autovalor associado a x!

Dado um chute inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (não-nulo), calcule $y^{(0)} = {}^{x^{(0)}}/_{\|x^{(0)}\|_2}$.

Dado um chute inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (não-nulo), calcule $y^{(0)} = {x^{(0)}}/{\|x^{(0)}\|_2}$.

Para $k = 1, 2, \ldots$ faça:

$$\boxed{x^{(k)} = Ay^{(k-1)}, \quad y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|_2}, \quad \lambda_1^{(k)} = y^{(k)} \cdot Ay^{(k)}}$$

Dado um chute inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (não-nulo), calcule $y^{(0)} = {}^{x^{(0)}}/_{\|x^{(0)}\|_2}$.

Para $k = 1, 2, \ldots$ faça:

$$\boxed{x^{(k)} = Ay^{(k-1)}, \quad y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|_2}, \quad \lambda_1^{(k)} = y^{(k)} \cdot Ay^{(k)}}$$

O vetor $y^{(k)}$ é uma aproximação de v_1.

Método das Potências

Processo Iterativo

Dado um chute inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (não-nulo), calcule $y^{(0)} = x^{(0)}/\|x^{(0)}\|_2$.

Para $k = 1, 2, \ldots$ faça:

$$\boxed{x^{(k)} = Ay^{(k-1)}, \quad y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|_2}, \quad \lambda_1^{(k)} = y^{(k)} \cdot Ay^{(k)}}$$

O vetor $y^{(k)}$ é uma aproximação de v_1.

Note que pela recursão acima temos:

$$y^{(k)} = \beta^{(k)} A^k x^{(0)} \quad \text{com} \quad \beta^{(k)} = \frac{1}{\prod_{i=0}^{k} \|x^{(i)}\|_2} = \frac{1}{\|A^k x^{(0)}\|_2}$$

Afirmação: $\mathrm{y}^{(k)} \to \pm \mathrm{v}_1$

Afirmação: $\mathrm{y}^{(k)} \to \pm \mathrm{v}_1$

$$\mathrm{x}^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{v}_i \;\Rightarrow\; \mathrm{y}^{(0)} = \beta^{(0)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{v}_i \,, \quad \text{com} \quad \beta^{(0)} = \frac{1}{\|\mathrm{x}^{(0)}\|_2}$$

$$\mathrm{x}^{(1)} = \mathrm{A}\mathrm{y}^{(0)} = \beta^{(0)} \mathrm{A} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{v}_i = \beta^{(0)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{A}\mathrm{v}_i = \beta^{(0)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \mathrm{v}_i$$

$$\mathrm{y}^{(1)} = \beta^{(1)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \mathrm{v}_i \,, \quad \text{com} \quad \beta^{(1)} = \frac{1}{\|\mathrm{x}^{(0)}\|_2 \|\mathrm{x}^{(1)}\|_2}$$

Assim por diante... até o passo k:

$$\mathrm{y}^{(k)} = \beta^{(k)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k \mathrm{v}_i \,, \quad \text{com} \quad \beta^{(k)} = \frac{1}{\|\mathrm{x}^{(0)}\|_2 \cdots \|\mathrm{x}^{(k)}\|_2}$$

$$\mathrm{y}^{(k)} = \beta^{(k)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k \mathrm{v}_i = \beta^{(k)} \lambda_1^k \left(\alpha_1 \mathrm{v}_1 + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} \mathrm{v}_i}_{\mathrm{r}^{(k)}} \right)$$

Como $|\lambda_1| > |\lambda_i| \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty} \left(\lambda_i/\lambda_1\right)^k = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty} \mathrm{r}^{(k)} = \overline{0}$, logo

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{y}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \beta^{(k)} \lambda_1^k \alpha_1 \mathrm{v}_1 \,.$$

Agora precisamos mostrar que $\beta^{(k)} \lambda_1^k \alpha_1 \to \pm 1$. Por outro lado,

$$\beta^{(k)} = \frac{1}{\|\mathrm{A}^k \mathrm{x}^{(0)}\|_2} = \frac{1}{\|\lambda_1^k(\alpha_1 \mathrm{v}_1 + \mathrm{r}^{(k)})\|_2} \quad \text{e} \quad \|\mathrm{v}_1\|_2 = 1$$

Portanto, $\quad \beta^{(k)} \lambda_1^k \alpha_1 = \dfrac{\lambda_1^k \alpha_1}{\|\lambda_1^k(\alpha_1 \mathrm{v}_1 + \mathrm{r}^{(k)})\|_2} \to \pm 1\,.$

Dados $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$, temos:

1. $k = k_{max}$

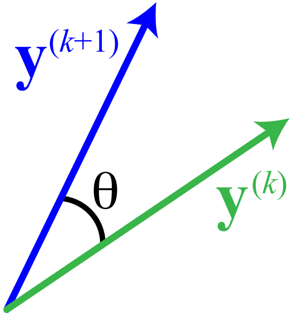
Dados $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$, temos:

1. $k = k_{max}$
2. $|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \varepsilon$

Dados $\varepsilon > 0$ e $k_{max} \in \mathbb{N}$, temos:

1. $k = k_{max}$
2. $|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \varepsilon$
3. teste de alinhamento ($|\cos\theta| \approx 1$):

$$\boxed{\big|\,|y^{(k+1)} \cdot y^{(k)}| - 1\,\big| < \varepsilon}$$



Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^\top$ como chute inicial.

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^\top$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^\top$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = {}^{x^{(1)}}\!/\!_{\|x^{(1)}\|_2} = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^\top$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)}/\|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$\textit{erro} = \left|\, |y^{(1)} \cdot y^{(0)}| - 1 \,\right| = 0.6838 > \varepsilon$$

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^\top$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)}/\|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$\mathit{erro} = |\,|y^{(1)} \cdot y^{(0)}| - 1\,| = 0.6838 > \varepsilon$$

$$x^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\sqrt{10}/10 \\ 9\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

Método das Potências

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^\top$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)}/\|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$\textit{erro} = \left|\, |y^{(1)} \cdot y^{(0)}| - 1 \,\right| = 0.6838 > \varepsilon$$

$$x^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\sqrt{10}/10 \\ 9\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(2)} = x^{(2)}/\|x^{(2)}\|_2 = \begin{bmatrix} 7\sqrt{130}/130 \\ 9\sqrt{130}/130 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^\top$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)}/\|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$\textit{erro} = |\,|y^{(1)} \cdot y^{(0)}| - 1\,| = 0.6838 > \varepsilon$$

$$x^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\sqrt{10}/10 \\ 9\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(2)} = x^{(2)}/\|x^{(2)}\|_2 = \begin{bmatrix} 7\sqrt{130}/130 \\ 9\sqrt{130}/130 \end{bmatrix}$$

$$\textit{erro} = |\,|y^{(2)} \cdot y^{(1)}| - 1\,| = 0.0570 < \varepsilon$$

Exemplo 1

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Use o Método das Potências para calcular o autovalor dominante e seu autovetor correspondente, com $\varepsilon = 0.1$ para o teste de alinhamento.

Solução: vamos escolher $y^{(0)} = [1, 0]^\top$ como chute inicial.

$$x^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(1)} = x^{(1)}/\|x^{(1)}\|_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$\textit{erro} = |\,|y^{(1)} \cdot y^{(0)}| - 1\,| = 0.6838 > \varepsilon$$

$$x^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 \\ 3\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\sqrt{10}/10 \\ 9\sqrt{10}/10 \end{bmatrix} \Rightarrow y^{(2)} = x^{(2)}/\|x^{(2)}\|_2 = \begin{bmatrix} 7\sqrt{130}/130 \\ 9\sqrt{130}/130 \end{bmatrix}$$

$$\textit{erro} = |\,|y^{(2)} \cdot y^{(1)}| - 1\,| = 0.0570 < \varepsilon \Rightarrow \lambda_1 \approx \lambda_1^{(2)} = y^{(2)} \cdot Ay^{(2)} = 4.0462$$

Definição (vetor estocástico)

Um vetor $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n$ *com* $p_i \geq 0$ *e* $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ *é chamado de estocástico.*

Definição (vetor estocástico)

Um vetor $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n$ *com* $p_i \geq 0$ *e* $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ *é chamado de estocástico.*

Definição (matriz estocástica)

Uma matriz $\mathrm{A} \in \mathcal{M}(n, n)$ *cujos vetores coluna são estocásticos é chamada de matriz estocástica.*

Definição (vetor estocástico)

Um vetor $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n$ *com* $p_i \geq 0$ *e* $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ *é chamado de estocástico.*

Definição (matriz estocástica)

Uma matriz $\mathrm{A} \in \mathcal{M}(n, n)$ *cujos vetores coluna são estocásticos é chamada de matriz estocástica.*

Proposição

Se $\mathrm{A} \in \mathcal{M}(n, n)$ *e* $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^n$ *são estocásticos então:*

1. *o vetor* $\mathrm{Ap} \in \mathbb{R}^n$ *é estocástico;*
2. $\lambda = 1$ *é um autovalor de* A*.*

Processo de Markov

- Dada uma matriz estocástica A e um distribuição de probabilidade $p^{(t)}$ no tempo t , podemos descobrir a distribuição no tempo $t + k$:

$$\boxed{p^{(t+k)} = A^k p^{(t)} .}$$

Processo de Markov

- Dada uma matriz estocástica A e um distribuição de probabilidade $\mathrm{p}^{(t)}$ no tempo t , podemos descobrir a distribuição no tempo $t+k$:

$$\boxed{\mathrm{p}^{(t+k)} = \mathrm{A}^k \mathrm{p}^{(t)}\,.}$$

Exemplo 4

Em uma cidade têm pessoas que só ficam em 3 estados: 1 (magra), 2 (gorda) e 3 (sarada). A distribuição inicial é dada por $\mathrm{p}^{(0)} = (1/3, 1/3, 1/3)^\top$, suponha que a matriz estocástica seja

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Processo de Markov

- Dada uma matriz estocástica A e um distribuição de probabilidade $p^{(t)}$ no tempo t , podemos descobrir a distribuição no tempo $t+k$:

$$\boxed{p^{(t+k)} = A^k p^{(t)} \, .}$$

Exemplo 4

Em uma cidade têm pessoas que só ficam em 3 estados: 1 (magra), 2 (gorda) e 3 (sarada). A distribuição inicial é dada por $p^{(0)} = (1/3, 1/3, 1/3)^\top$, suponha que a matriz estocástica seja

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \implies p^{(1)} = Ap^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Teorema (Perron-Frobenius)

Seja $\mathsf{A} \in \mathcal{M}(n, n)$ *uma matriz estocástica, então:*

1. $\lambda = 1$ *é o autovalor dominante de* A*;*
2. *O autovetor* v *associado a* λ *possui todas entradas positivas ou negativas. Em particular, para* λ *existe um único autovetor que é estocástico.*

Teorema (Perron-Frobenius)

Seja $\mathrm{A} \in \mathcal{M}(n, n)$ *uma matriz estocástica, então:*

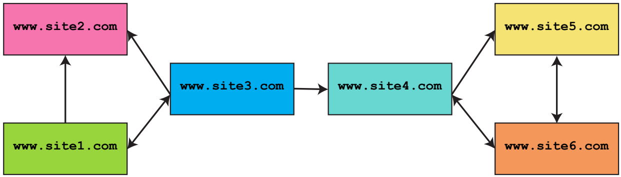
1. $\lambda = 1$ *é o autovalor dominante de* A*;*
2. *O autovetor* v *associado a* λ *possui todas entradas positivas ou negativas. Em particular, para* λ *existe um único autovetor que é estocástico.*

Portanto, a convergência do Processo de Markov é assegurada graças ao Método das Potências, isto é,

$$\mathrm{p}^{(k)} \to \mathrm{v}\,.$$

O autovetor v é chamado de vetor estacionário de A.

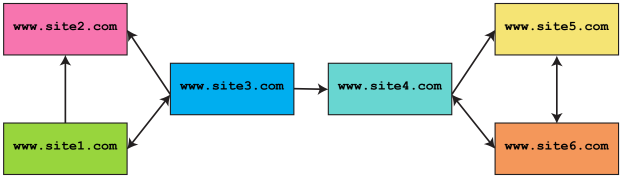
Aplicação: Pagerank
WWW



Páginas da web podem ser representadas como um grafo direcionado.

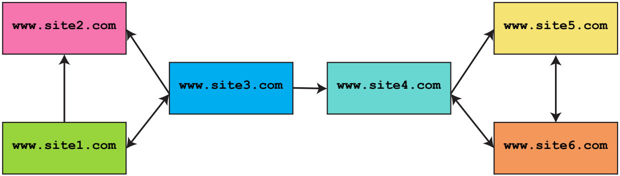
- uma página é importante se páginas importantes têm *link* para ela;
- eleição: um link de $A \to B$ é um voto de A para B;

Aplicação: Pagerank
WWW



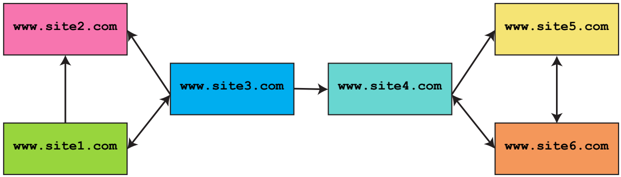
Páginas da web podem ser representadas como um grafo direcionado.

- uma página é importante se páginas importantes têm *link* para ela;
- eleição: um link de $A \to B$ é um voto de A para B;
- visão probabilística do Pagerank: é a probabilidade de uma página web ser visitada em certo instante de tempo durante um passeio aleatório infinito.



Um grafo direcionado pode ser representado por uma matriz de conectividade:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se tem link } j \to i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Agora precisamos transformar A em uma "matriz estocástica" P:

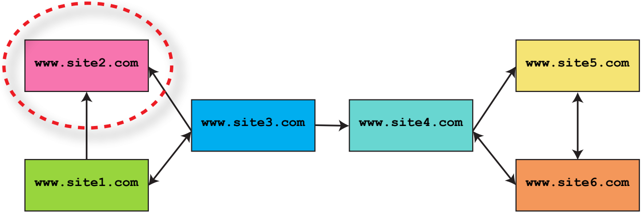
$$p_{ij} = \begin{cases} a_{ij}/c_j & \text{se } c_j \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{com} \quad c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Pagerank

www

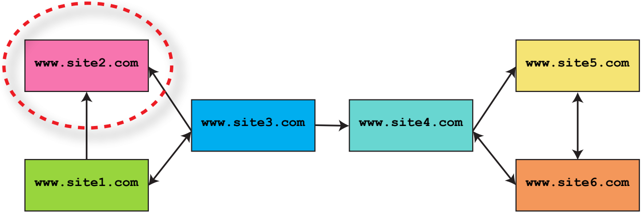


Para resolver os "becos sem saída" precisamos de um vetor $\mathrm{d} \in \mathbb{R}^n$:

$$d_j = \begin{cases} 1/n & \text{se } c_j = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathbb{1} = [1, \ldots, 1]^\top \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbb{1}\mathrm{d}^\top$$



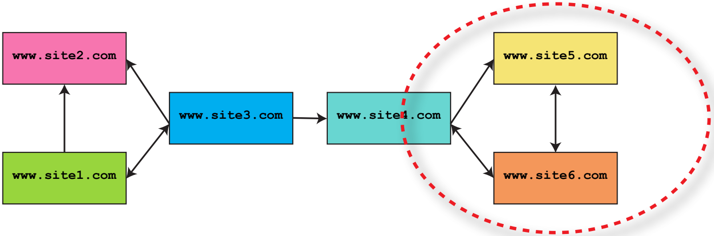
Para resolver os "becos sem saída" precisamos de um vetor $d \in \mathbb{R}^n$:

$$d_j = \begin{cases} 1/n & \text{se } c_j = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mathbb{1} = [1, \ldots, 1]^\top \in \mathbb{R}^n$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

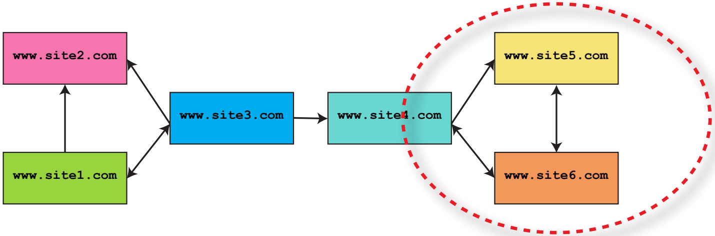
Aplicação: Pagerank
www



Agora precisamos evitar ciclos no grafo modificando S de modo a tornar o grafo irredutível:

$$G = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + (1-\alpha)\frac{\mathbb{1}\mathbb{1}^\top}{n}$$

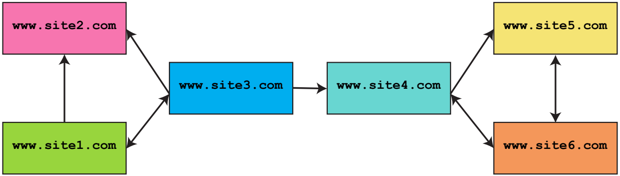
Aplicação: Pagerank
www



Agora precisamos evitar ciclos no grafo modificando S de modo a tornar o grafo irredutível:

$$G = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Pagerank
www



Matriz Google:

$$G = \alpha(A + \mathbb{1}d^\top) + (1-\alpha)\frac{\mathbb{1}\mathbb{1}^\top}{n}$$

Originalmente o valor escolhido para o peso foi $\alpha = 0.85$.

a função `eigs` em `scipy.sparse.linalg` calcula os k autovalores e autovetores de uma matriz quadrada.