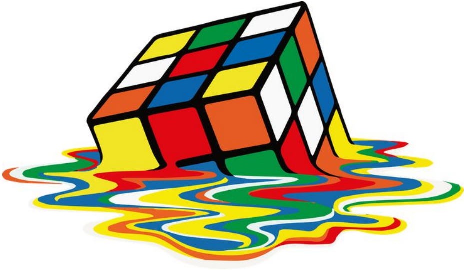


Introdução à Modelagem Matemática – SME0241

Interpolação de Dados Dispersos

Afonso Paiva
ICMC-USP

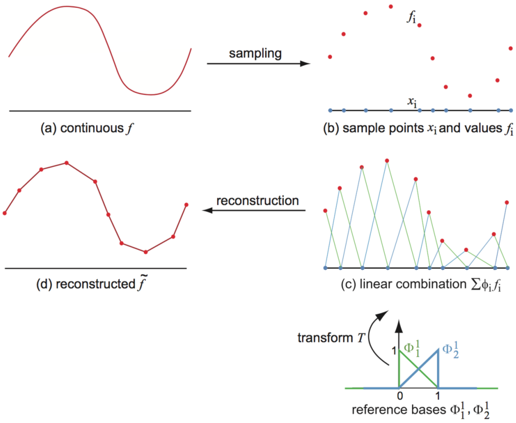
12 de novembro de 2024

Dados Amostrados e Contínuos

- Amostragem: Dado um conjunto de dados contínuos $\Rightarrow$ produzimos uma amostragem de dados;
- Reconstrução: Dado um conjunto de dados amostrados $\Rightarrow$ obtemos uma versão aproximada do dado contínuo original (interpolação).

Dados Amostrados e Contínuos

- Amostragem: Dado um conjunto de dados contínuos $\Rightarrow$ produzimos uma amostragem de dados;
- Reconstrução: Dado um conjunto de dados amostrados $\Rightarrow$ obtemos uma versão aproximada do dado contínuo original (interpolação).



Problema Básico de Interpolação

Dado um conjunto de dados amostrados $\{x_i, f_i\}$ com $(n+1)$ pontos:

- pontos $x_i \in \Omega \subset \mathbb{R}$;
- valores amostrados $f_i = f(x_i) \in \mathbb{R}$.

Problema Básico de Interpolação

Dado um conjunto de dados amostrados $\{x_i, f_i\}$ com $(n+1)$ pontos:

- pontos $x_i \in \Omega \subset \mathbb{R}$;
- valores amostrados $f_i = f(x_i) \in \mathbb{R}$.

Determine uma função $F : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{f_i = F(x_i), \qquad i = 0, \ldots, n\,.}$$

Problema Básico de Interpolação

Dado um conjunto de dados amostrados $\{x_i, f_i\}$ com $(n+1)$ pontos:

- pontos $x_i \in \Omega \subset \mathbb{R}$;
- valores amostrados $f_i = f(x_i) \in \mathbb{R}$.

Determine uma função $F : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{f_i = F(x_i), \qquad i = 0, \ldots, n\,.}$$

- A função $F(x)$ é a função interpoladora dos pontos dados;

Problema Básico de Interpolação

Dado um conjunto de dados amostrados $\{x_i, f_i\}$ com $(n+1)$ pontos:

- pontos $x_i \in \Omega \subset \mathbb{R}$;
- valores amostrados $f_i = f(x_i) \in \mathbb{R}$.

Determine uma função $F : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\boxed{f_i = F(x_i), \qquad i = 0, \ldots, n\,.}$$

- A função $F(x)$ é a função interpoladora dos pontos dados;
- Os pontos x_i são chamados de nós da interpolação.

Interpolação

Uma forma de encontrar uma função interpoladora que satisfaz $f_i = F(x_i)$ é fazendo:

$$F(x) = f_0\,\phi_0(x) + f_1\,\phi_1(x) + \cdots + f_n\,\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k\,\phi_k(x)\,,$$

em que $\phi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ são chamadas de funções base.

Interpolação

Uma forma de encontrar uma função interpoladora que satisfaz $f_i = F(x_i)$ é fazendo:

$$F(x) = f_0\,\phi_0(x) + f_1\,\phi_1(x) + \cdots + f_n\,\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k\,\phi_k(x)\,,$$

em que $\phi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ são chamadas de funções base. Dessa forma,

$$f_i = F(x_i) = f_0\,\phi_0(x_i) + \cdots + f_i\,\phi_i(x_i) + \cdots + f_n\,\phi_n(x_i)\,.$$

Uma forma de encontrar uma função interpoladora que satisfaz $f_i = F(x_i)$ é fazendo:

$$F(x) = f_0\,\phi_0(x) + f_1\,\phi_1(x) + \cdots + f_n\,\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k\,\phi_k(x)\,,$$

em que $\phi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ são chamadas de funções base. Dessa forma,

$$f_i = F(x_i) = f_0\,\phi_0(x_i) + \cdots + f_i\,\phi_i(x_i) + \cdots + f_n\,\phi_n(x_i)\,.$$

Portanto, temos uma condição de ortogonalidade:

$$\phi_k(x_i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k \\ 0, & \text{se } i \neq k \end{cases}$$

Interpolação Polinomial

Agora queremos encontrar um polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ que satisfaz:

$$\boxed{f_i = P_n(x_i), \qquad i = 0, \ldots, n\,.}$$

O polinômio $P_n(x)$ é chamado de polinômio de interpolação.

Interpolação Polinomial

Agora queremos encontrar um polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ que satisfaz:

$$\boxed{f_i = P_n(x_i), \qquad i = 0, \ldots, n\,.}$$

O polinômio $P_n(x)$ é chamado de polinômio de interpolação.

Teorema

Dados $(n+1)$ pontos $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$ com $x_0 < \cdots < x_n$, existe um único polinômio $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ que satisfaz as condições acima.

Agora queremos encontrar um polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ que satisfaz:

$$\boxed{f_i = P_n(x_i), \qquad i = 0, \ldots, n\,.}$$

O polinômio $P_n(x)$ é chamado de polinômio de interpolação.

Teorema

Dados $(n+1)$ pontos $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$ com $x_0 < \cdots < x_n$, existe um único polinômio $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ que satisfaz as condições acima.

Como escolher funções base $\phi_k(x)$ para obter $P_n(x)$?

Forma de Lagrange

Assim, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \, \phi_k(x)$ com $f_i = P_n(x_i)$.

Forma de Lagrange

Assim, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \, \phi_k(x)$ com $f_i = P_n(x_i)$.

Para isso, basta definir cada função base $\phi_k(x)$ como um polinômio de Lagrange de grau $\leq n$:

$$\phi_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Forma de Lagrange

Exemplo

Dada a função tabelada $y = f(x)$:

x	-2	0	3	5
y	3	-2	4	2

Calcule o polinômio de interpolação com a forma de Lagrange usando todos os pontos da tabela.

Forma de Lagrange

Solução:

$$P_3(x) = 3\phi_0(x) - 2\phi_1(x) + 4\phi_2(x) + 2\phi_3(x)$$

$$\phi_0(x) = \frac{x(x-3)(x-5)}{-70}$$

$$\phi_1(x) = \frac{(x+2)(x-3)(x-5)}{30}$$

$$\phi_2(x) = \frac{(x+2)x(x-5)}{-30}$$

$$\phi_3(x) = \frac{(x+2)x(x-3)}{70}$$

Forma de Lagrange

Solução:

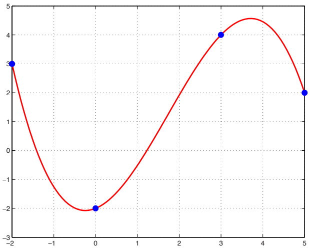
$$P_3(x) = 3\phi_0(x) - 2\phi_1(x) + 4\phi_2(x) + 2\phi_3(x)$$

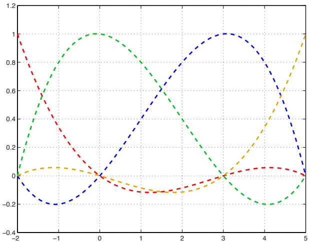
$$\phi_0(x) = \frac{x(x-3)(x-5)}{-70}$$

$$\phi_1(x) = \frac{(x+2)(x-3)(x-5)}{30}$$

$$\phi_2(x) = \frac{(x+2)x(x-5)}{-30}$$

$$\phi_3(x) = \frac{(x+2)x(x-3)}{70}$$





Polinômios de Lagrange

Estimativas de Erro na Interpolação

Teorema (erro na interpolação na forma de Lagrange)

Sejam $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ *e* $P_n(x)$ *o polinômio de interpolação de* $f(x)$ *então*

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\,,$$

onde $\xi = \xi(x) \in (a,b)$.

Estimativas de Erro na Interpolação

Teorema (erro na interpolação na forma de Lagrange)

Sejam $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ *e* $P_n(x)$ *o polinômio de interpolação de* $f(x)$ *então*

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\,,$$

onde $\xi = \xi(x) \in (a,b)$.

Corolário

- $|E_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$
- $\|E_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty (b-a)^{n+1}$

Estimativas de Erro na Interpolação

Exemplo

Se a função $f(x) = \cos(x)$ é aproximada por polinômio de grau 9 que interpola f em 10 pontos no intervalo $[0, 1]$, quão grande é o erro de interpolação neste intervalo?

Exemplo

Se a função $f(x) = \cos(x)$ é aproximada por polinômio de grau 9 que interpola f em 10 pontos no intervalo $[0, 1]$, quão grande é o erro de interpolação neste intervalo?

Solução: Vamos calcular um limitante superior para $\|E_9\|_\infty$. Logo,

$$\|f^{(10)}\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f^{(10)}(t)| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \|E_9\|_\infty \leq \frac{1}{10!} < 2.8 \times 10^{-7}\,.$$

Exemplo

Se a função $f(x) = \cos(x)$ é aproximada por polinômio de grau 9 que interpola f em 10 pontos no intervalo $[0, 1]$, quão grande é o erro de interpolação neste intervalo?

Solução: Vamos calcular um limitante superior para $\|E_9\|_\infty$. Logo,

$$\|f^{(10)}\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f^{(10)}(t)| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \|E_9\|_\infty \leq \frac{1}{10!} < 2.8 \times 10^{-7}.$$

Será que P_n converge para f quando $n \to \infty$?

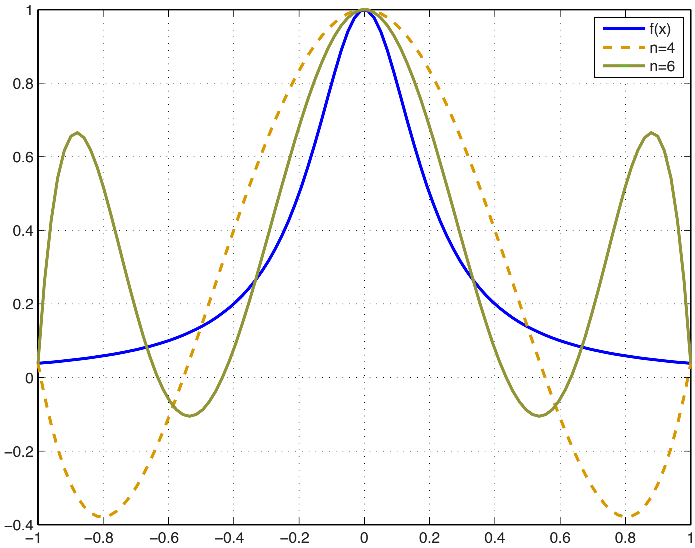
Exemplo

Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \qquad x \in [-1, 1].$$

Calcule e plote no Python o polinômio de interpolação de f usando a forma de Lagrange com 5, 7 e 16 nós de interpolação igualmente espaçados no intervalo $[-1, 1]$.

Fenômeno de Runge



Fenômeno de Runge

Conclusões:

- Não há garantias que P_n converge para f quando $n \to \infty$;
- Interpolação polinomial de alta ordem é instável em uma distribuição uniforme de nós.

Fenômeno de Runge

Conclusões:

- Não há garantias que P_n converge para f quando $n \to \infty$;
- Interpolação polinomial de alta ordem é instável em uma distribuição uniforme de nós.

Soluções:

- Usar uma distribuição **não uniforme** de nós que minimize o erro (nós de Chebyshev);
- Interpolação polinomial **por partes** (splines).

Visualização de Pontos Dispersos: *scatter plot*

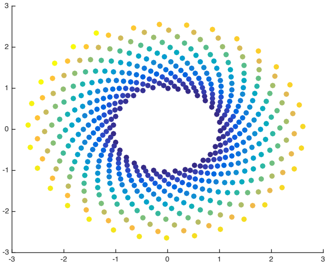
Dada uma nuvem de pontos $\{\mathsf{p}_i, f_i\}$ como visualizar esse conjunto?

- $\mathsf{p}_i \in \mathbb{R}^d$: posição
- $f_i = f(\mathsf{p}_i) \in \mathbb{R}$: atributo escalar (função discreta)

Visualização de Pontos Dispersos: *scatter plot*

Dada uma nuvem de pontos $\{p_i, f_i\}$ como visualizar esse conjunto?

- $p_i \in \mathbb{R}^d$: posição
- $f_i = f(p_i) \in \mathbb{R}$: atributo escalar (função discreta)



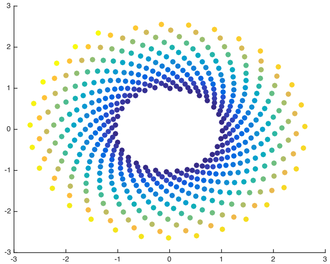
$$p_i = \left(e^{\theta_i} \sin(10^2\theta_i), e^{\theta_i} \cos(10^2\theta_i)\right), \ \theta_i \in [0, 1]$$

$$f_i = \|p_i\|^2$$

Visualização de Pontos Dispersos: *scatter plot*

Dada uma nuvem de pontos $\{\mathrm{p}_i, f_i\}$ como visualizar esse conjunto?

- $\mathrm{p}_i \in \mathbb{R}^d$: posição
- $f_i = f(\mathrm{p}_i) \in \mathbb{R}$: atributo escalar (função discreta)



$$\mathrm{p}_i = \left(e^{\theta_i}\sin(10^2\theta_i), e^{\theta_i}\cos\left(10^2\theta_i\right)\right),\ \theta_i \in [0,1]$$

$$f_i = \|\mathrm{p}_i\|^2$$

`scatter(x,y,sz,f)`: scatter plot 2D (`matplotlib.pyplot`)

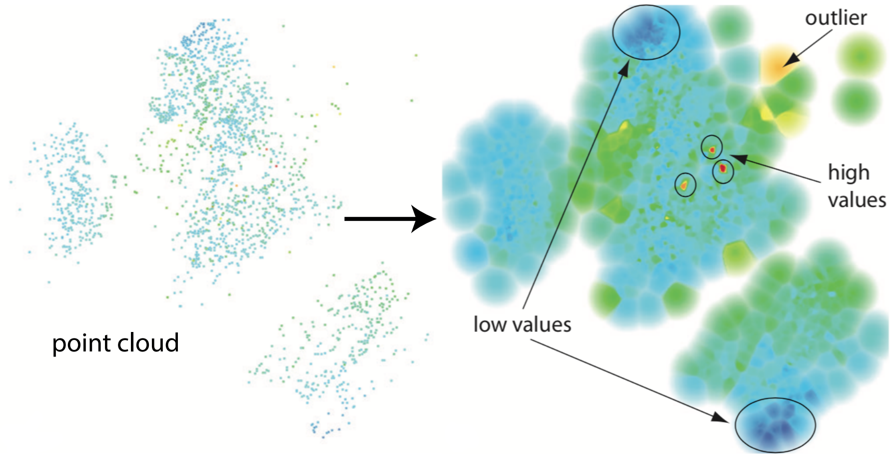
% `x,y`: vetores com as coordenadas dos pontos $\mathrm{p}_i = (x_i, y_i)$;

% `sz`: tamanho dos círculos;

% `f`: atribui os valores de f_i para um mapa de cores;

Interpolação de Pontos Dispersos

Dada uma nuvem de pontos, como interpolar para um grid os valores de f_i?



Funções de Base Radial

- Função real $\phi_i : \mathbb{R}^d \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ cujo valor depende apenas da distância de um ponto ao centro $p_i \in \mathbb{R}^d$.
- *Radial Basis Function* (RBF)

Interpolação de Pontos Dispersos: RBF

Funções de Base Radial

- Função real $\phi_i : \mathbb{R}^d \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ cujo valor depende apenas da distância de um ponto ao centro $\mathrm{p}_i \in \mathbb{R}^d$.
- *Radial Basis Function* (RBF)

$$\boxed{\phi_i(\mathrm{p}) = \varphi(\|\mathrm{p} - \mathrm{p}_i\|)}$$

Interpolação de Pontos Dispersos: RBF

Funções de Base Radial

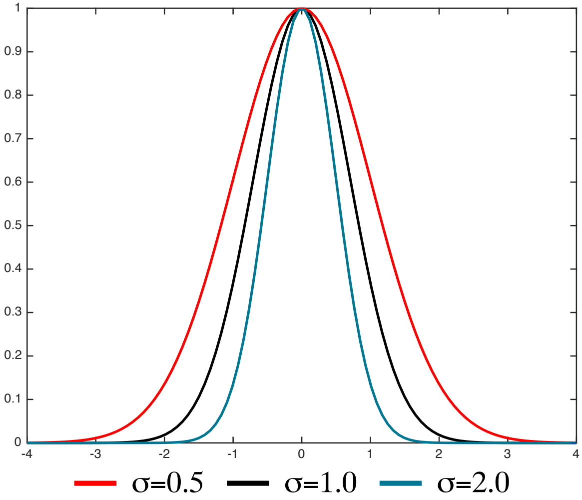
- Função real $\phi_i : \mathbb{R}^d \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ cujo valor depende apenas da distância de um ponto ao centro $\mathrm{p}_i \in \mathbb{R}^d$.
- *Radial Basis Function* (RBF)

$$\boxed{\phi_i(\mathrm{p}) = \varphi(\|\mathrm{p} - \mathrm{p}_i\|)}$$

Exemplos:

- Poli-harmônica: $\varphi(r) = r^k \,, \quad k = 1, 3, 5, \ldots$
- Distância inversa: $\varphi(r) = 1/(1 + r)$
- Thin-plate spline: $\varphi(r) = r^2 \ln(r)$
- Multi-quádrica: $\varphi(r) = \sqrt{r^2 + \sigma^2}$, com $\sigma > 0$
- Gaussiana: $\varphi(r) = \exp(-\sigma r^2)$, com $\sigma > 0$

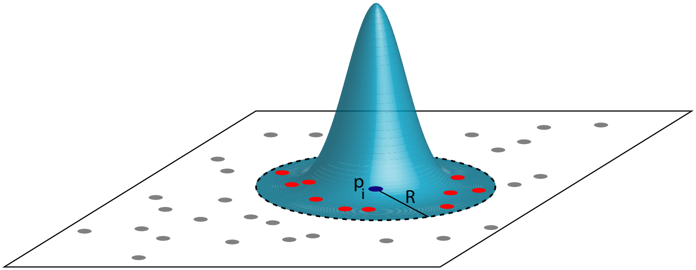
No caso da RBF Gaussiana, o parâmetro σ controla a forma (decaimento ou abertura) da RBF.



Interpolação de Pontos Dispersos: RBF

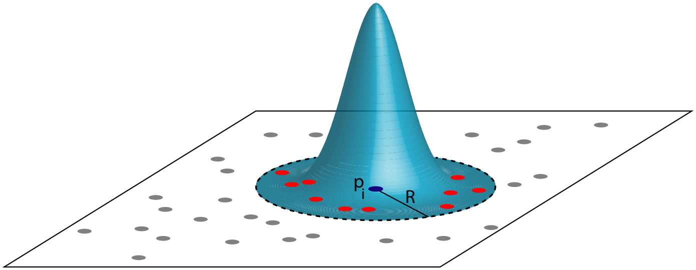
Suporte Compacto

- Podemos definir uma região com um raio de influência R e centro em p_i, em que ϕ_i vale zero fora dessa região, i.e., $\varphi(r) = 0$, se $r \geq R$.



Suporte Compacto

- Podemos definir uma região com um raio de influência R e centro em p_i, em que ϕ_i vale zero fora dessa região, i.e., $\varphi(r) = 0$, se $r \geq R$.



Aspectos Computacionais: precisamos de algoritmos de busca de pontos vizinhos eficientes (ex., KNN).

Interpolação RBF

Dada uma nuvem de pontos $\{\mathrm{p}_i, f_i\}$ com N amostras, queremos obter uma função interpoladora $F(\mathrm{p})$, tal que $F(\mathrm{p}_i) = f_i$ e

$$\boxed{F(\mathrm{p}) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \, \phi_j(\mathrm{p})}$$

Interpolação RBF

Dada uma nuvem de pontos $\{\mathrm{p}_i, f_i\}$ com N amostras, queremos obter uma função interpoladora $F(\mathrm{p})$, tal que $F(\mathrm{p}_i) = f_i$ e

$$\boxed{F(\mathrm{p}) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \, \phi_j(\mathrm{p})}$$

Logo, para obter F temos que descobrir os valores de λ_j. Por outro lado,

$$f_i = F(\mathrm{p}_i) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \underbrace{\phi_j(\mathrm{p}_i)}_{\phi_{ij}}, \quad i = 1, \ldots, N$$

Interpolação RBF

Portanto, para descobrir os valores de λ_j, basta resolver o sistema linear abaixo:

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

Interpolação RBF

Portanto, para descobrir os valores de λ_j, basta resolver o sistema linear abaixo:

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

`from scipy.spatial import distance`

`D = cdist(X,Y)`: distância entre os pontos dos conjuntos X e Y;

`% D`: matriz de distâncias;

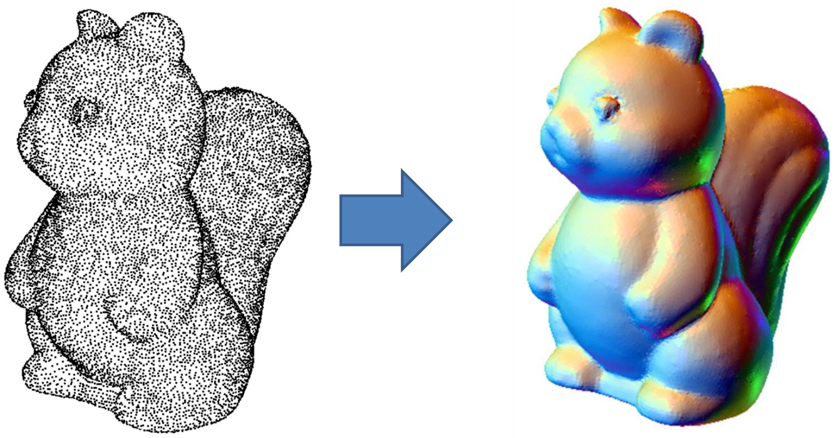
Funções de Base Radial (RBF)

Afonso Paiva

ICMC-USP

1

Motivação

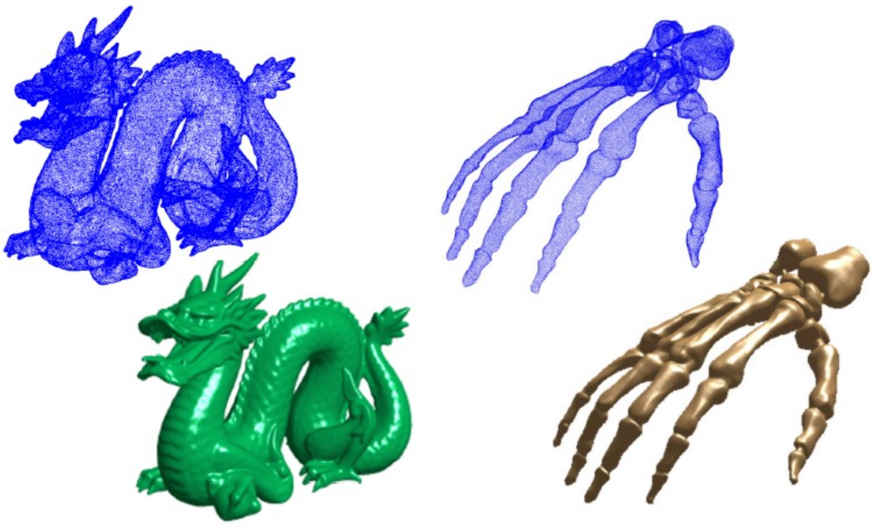


Nuvem de pontos

Encontrar uma superfície implícita que interpola os pontos

2

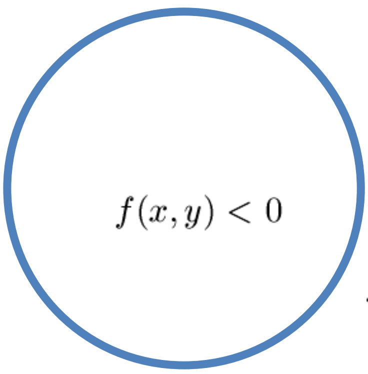
Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions (*Carr et al., Siggraph 2001*)



3

Representação Implícita

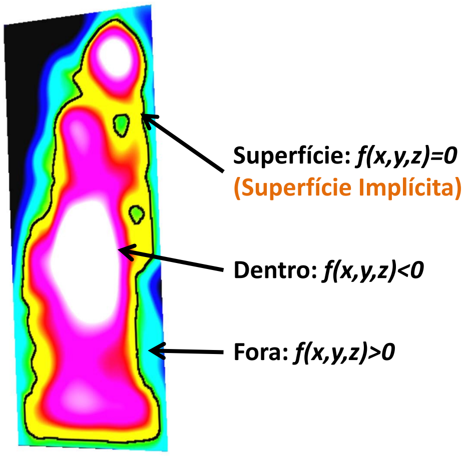
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$



$$C = f^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 0\}$$

4

Representação Implícita



Uma seção de *S*

$S = f^{-1}(0)$

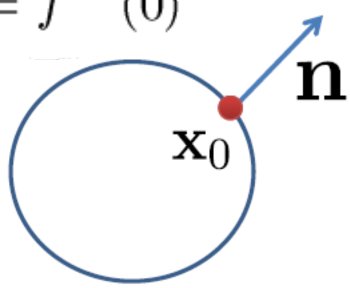
5

Cálculo do vetor normal

$$S = f^{-1}(0)$$

Teorema:

$$\boxed{\mathbf{n} = \nabla f(\mathbf{x_0})}$$

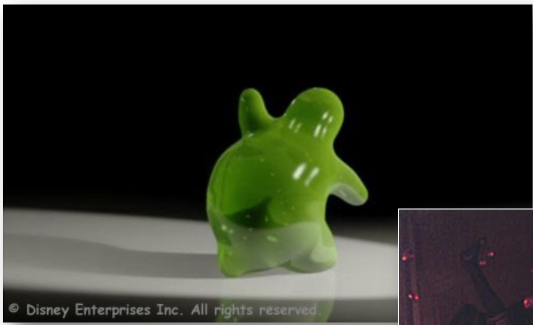


Prova:

$$f(\mathbf{x_0}) = f(\gamma(0)) = 0 \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x_0}) \cdot \gamma'(0) = 0$$

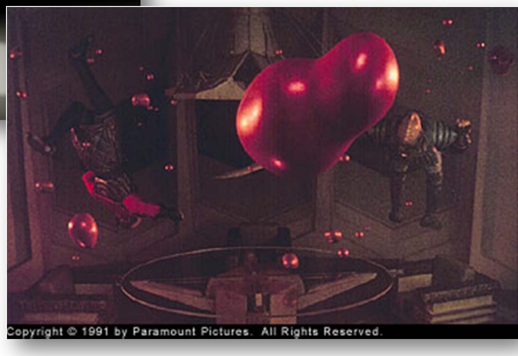
6

Superfícies Implícitas em CG



Flubber

- Disney, 1997



Star Trek VI

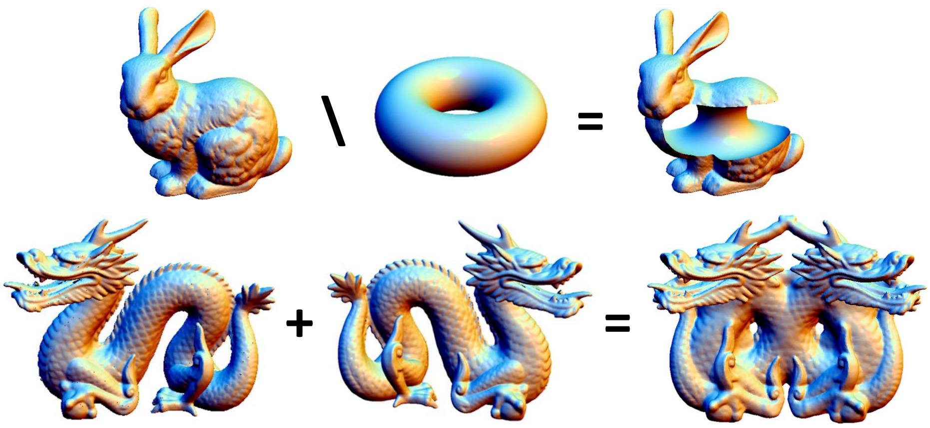
- Paramount, 1991

7

Por que usar superfícies implícitas?

Operações Booleanas

- Ohtake *et al.*, 2003.



8

Por que usar superfícies implícitas?

Edição Interativa (*sketching*)

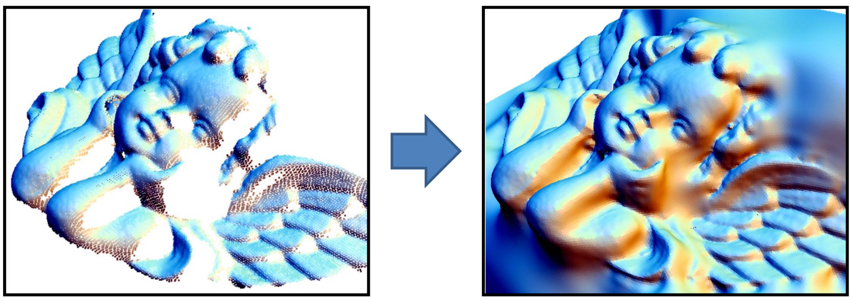
- Schmidt *et al.*, 2005.

9

Por que usar superfícies implícitas?

Restauração de Superfícies

- Ohtake *et al.*, 2003.

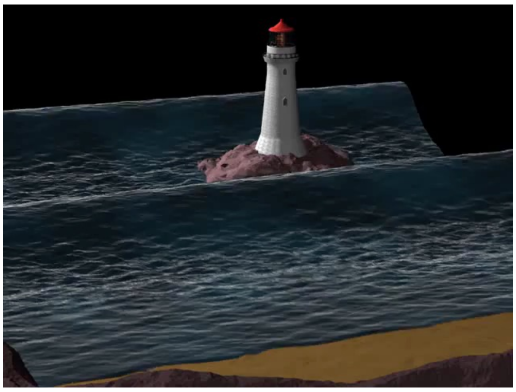


10

Por que usar superfícies implícitas?

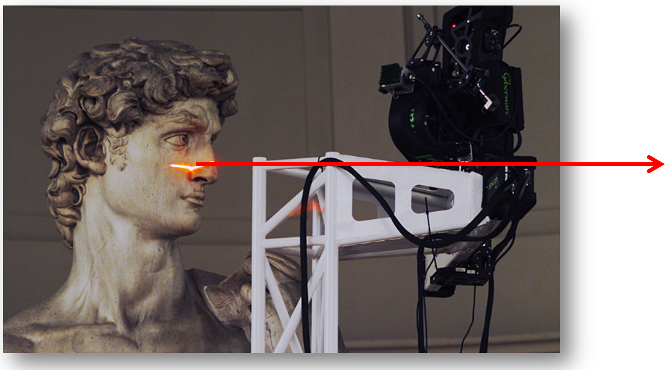
Superfície Livre de Fluido

- Losasso *et al.*, 2007.

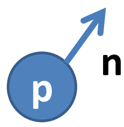


11

Scanner 3D



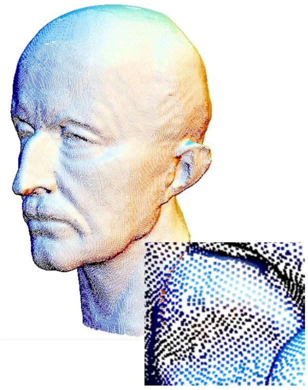
The Digital Michelangelo Project



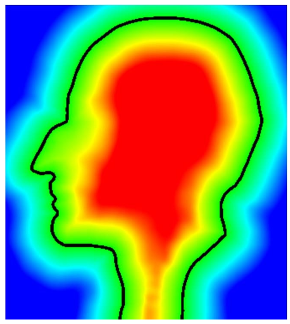
Dados de Hermite
(posição + normal)

12

Reconstrução via Superfícies Implícitas



Dados de Hermite



Função distância com sinal

$f\,(x,y,z) < 0$ ... dentro

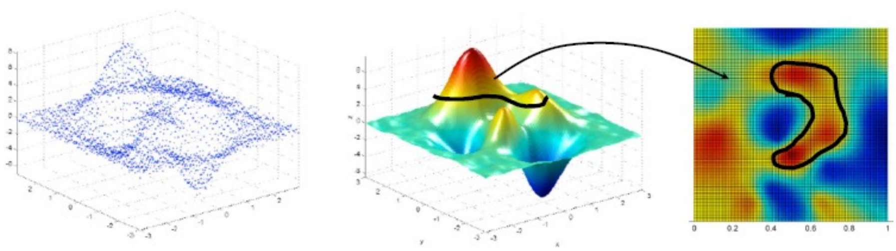
$f\,(x,y,z) > 0$ ... fora

$f\,(x,y,z) = 0$ ... pontos aproximados

13

Idéia Chave em RBF

Interpolar dados de Hermite em $\mathbb{R}^{n+1}$



Depois tomar uma superfície de nível dessa função.

14

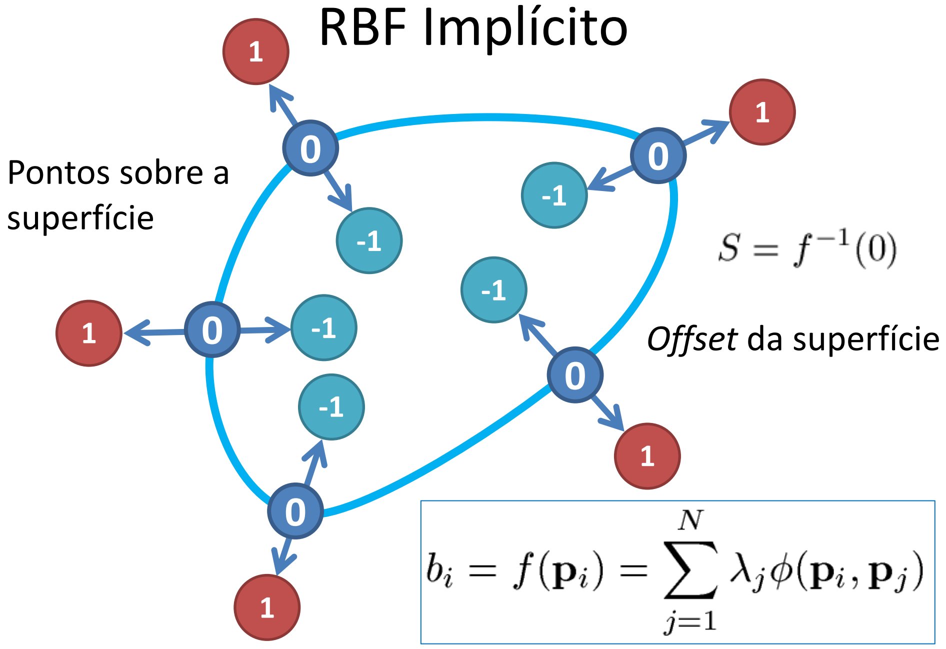
Interpolação via RBF

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \phi(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j)$$

Para obter os pesos λ precisamos resolver um sistema linear.
Mas como é esse sistema linear???

15

RBF Implícito



$$b_i = f(\mathbf{p}_i) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \phi(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$$

16

Problema de Interpolação RBF

Precisamos resolver o sistema linear:

$$b_i = f(\mathbf{p}_i) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \phi(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)\,,\; i = 1, \ldots, N$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

com $a_{ij} = \phi(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) = \varphi\left(\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|\right)$

17

Problema de Interpolação RBF

- Grandes problemas em RBF:
  - número de restrições aumenta com o número de pontos;
  - problemas de consumo de memória e de tempo computacional;
  - comprimento do offset;

18

Resultados

19