

Introdução à Modelagem Matemática – SME0241

Matrizes na Engenharia: Treliças

Notas de aula do Prof. Gustavo C. Buscaglia

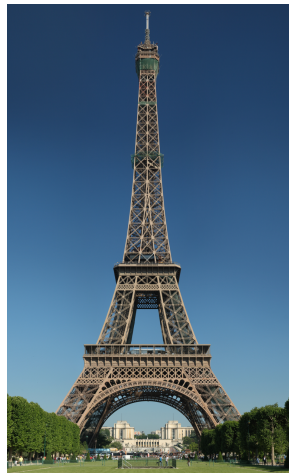
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
USP - São Carlos

7 de outubro de 2024

Treliças



Ponte 'The Little Belt', Dinamarca

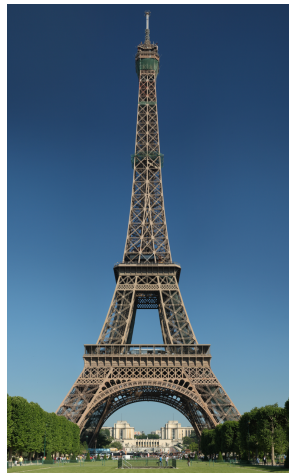


Torre Eiffel, França

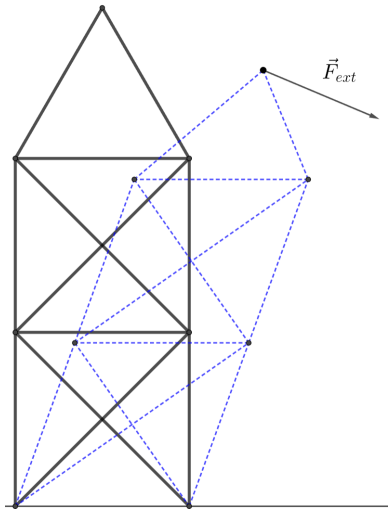
Treliças



Cobertura em estrutura metálica



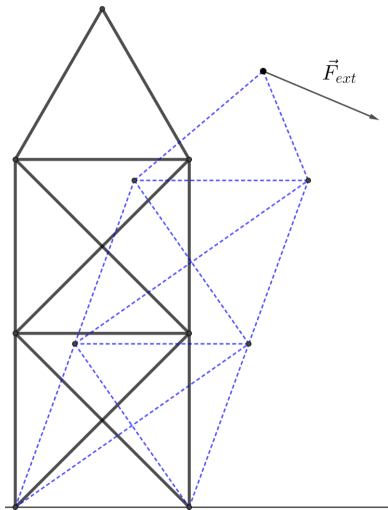
Torre Eiffel, França



Problema

Como calcular as forças exercidas pelas barras em cada nó de uma treliça?

Modelagem Matemática



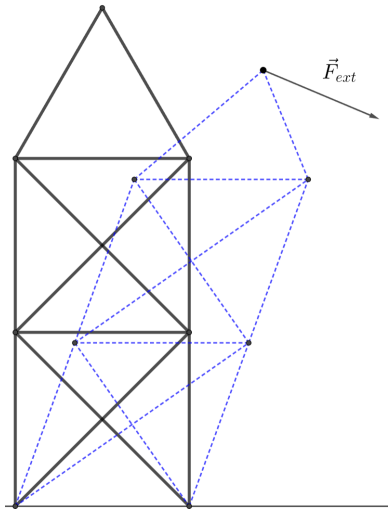
Problema

Como calcular as forças exercidas pelas barras em cada nó de uma treliça?

Equilíbrio estático

A soma das forças que as barras fazem em cada nó i e em cada direção (1 e 2 em 2D) mais a força externa no nó e na direção deve ser zero.

Modelagem Matemática



Problema

Como calcular as forças exercidas pelas barras em cada nó de uma treliça?

Equilíbrio estático

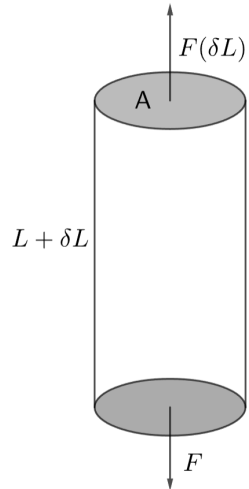
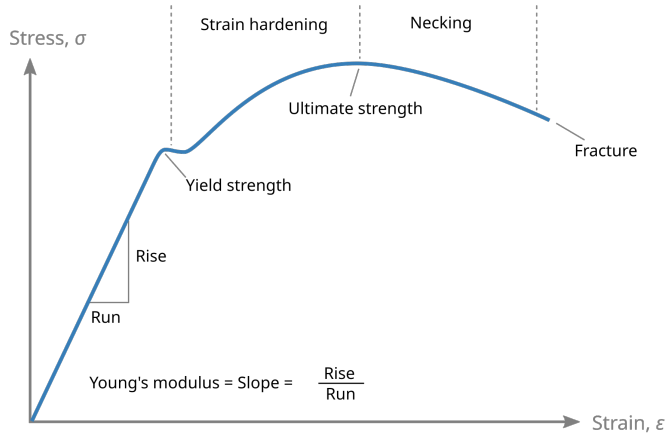
A soma das forças que as barras fazem em cada nó i e em cada direção (1 e 2 em 2D) mais a força externa no nó e na direção deve ser zero.

Estratégia

- ▶ Entender o comportamento de uma barra
- ▶ Estender para toda estrutura

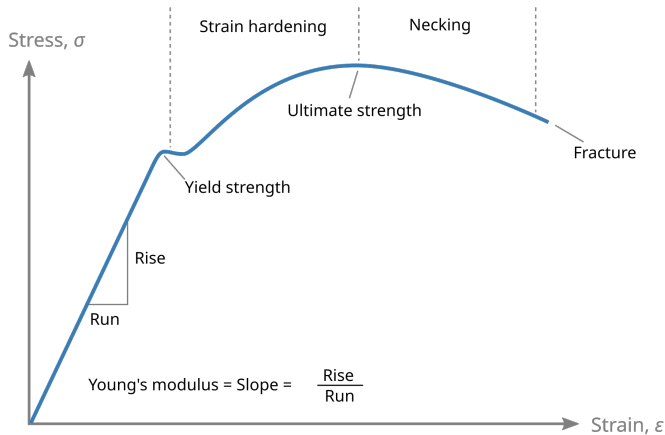
Ensaio de tração uniaxial

► Modelo experimental



Ensaio de tração uniaxial

► Modelo experimental



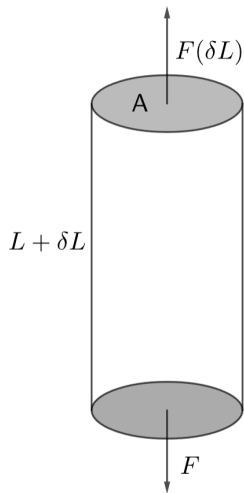
► Módulo de Young (regime **elástico**)

$$E = \frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

Material	Módulo de Young (GPa)
Osso	14
Alumínio	68
Ouro	77,2
Bronze	112
Aço	200
Grafeno	1050

Ensaio de tração uniaxial

► Módulo de Young



$$E = \frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} = \frac{FL_0}{A\Delta L}$$

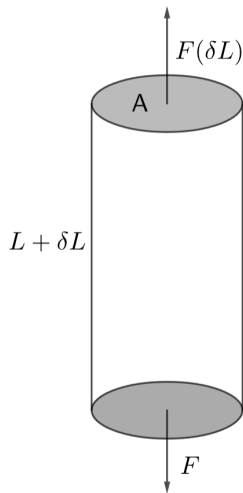
Ensaio de tração uniaxial

► Módulo de Young

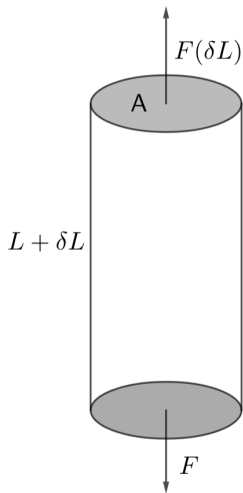
$$E = \frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} = \frac{FL_0}{A\Delta L}$$

► Tensão uniaxial

$$F = \frac{AE}{L_0}(L - L_0) \begin{cases} \text{tração } (L > L_0) \\ \text{compressão } (L < L_0) \end{cases}$$



Ensaio de tração uniaxial



► Módulo de Young

$$E = \frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} = \frac{FL_0}{A\Delta L}$$

► Tensão uniaxial

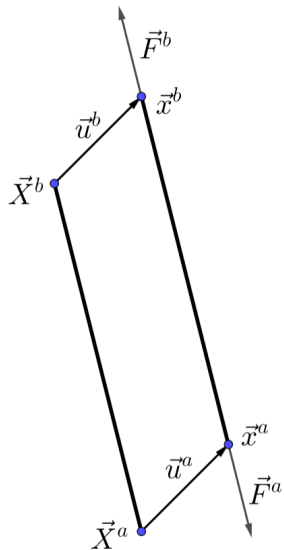
$$F = \frac{AE}{L_0}(L - L_0) \begin{cases} \text{tração } (L > L_0) \\ \text{compressão } (L < L_0) \end{cases}$$

► Forças atuantes

$$\vec{F}^b = \frac{AE}{L_0}(L - L_0)\vec{e}_{ab}$$

$$\vec{F}^a = -\vec{F}^b$$

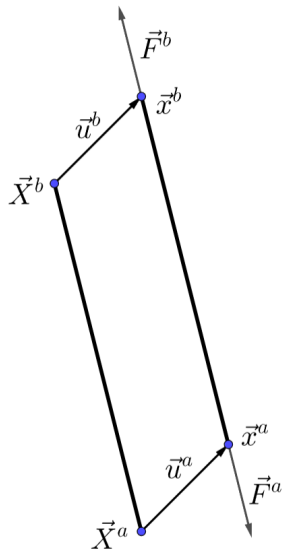
Uma barra



Para uma barra temos,

- ▶ Posição inicial: $(\vec{X}^a, \vec{X}^b)$
- ▶ Deslocamento: $(\vec{u}^a, \vec{u}^b)$
- ▶ Posição final: $\vec{x}^a = \vec{X}^a + \vec{u}^a$ e $\vec{x}^b = \vec{X}^b + \vec{u}^b$
- ▶ $L_0 = \|\vec{X}^b - \vec{X}^a\|$ e $L = \|\vec{x}^b - \vec{x}^a\|$
- ▶ $\vec{F}^b = \frac{AE}{L_0}(L - L_0)\vec{e}_{ab}$, onde $\vec{e}_{ab} = \frac{\vec{x}^b - \vec{x}^a}{\|\vec{x}^b - \vec{x}^a\|}$

Uma barra



Para uma barra temos,

- ▶ Posição inicial: $(\vec{X}^a, \vec{X}^b)$
- ▶ Deslocamento: $(\vec{u}^a, \vec{u}^b)$
- ▶ Posição final: $\vec{x}^a = \vec{X}^a + \vec{u}^a$ e $\vec{x}^b = \vec{X}^b + \vec{u}^b$
- ▶ $L_0 = \|\vec{X}^b - \vec{X}^a\|$ e $L = \|\vec{x}^b - \vec{x}^a\|$
- ▶ $\vec{F}^b = \frac{AE}{L_0}(L - L_0)\vec{e}_{ab}$, onde $\vec{e}_{ab} = \frac{\vec{x}^b - \vec{x}^a}{\|\vec{x}^b - \vec{x}^a\|}$

Notem que:

- ▶ $\vec{F}^b$ está em função de $\vec{u}^a$ e $\vec{u}^b$
- ▶ $\vec{F}^b$ é não linear

Aproximação Linear

- Ideia: Desenvolver $\vec{F}^b$ em série de potências em u_1^a , u_2^a , u_1^b , u_2^b e desprezar os termos de ordem > 1 para obtermos o seguinte sistema de equações:

$$F_1^a = K_{11}u_1^a + K_{12}u_2^a + K_{13}u_1^b + K_{14}u_2^b$$

$$F_2^a = K_{21}u_1^a + K_{22}u_2^a + K_{23}u_1^b + K_{24}u_2^b$$

$$F_1^b = K_{31}u_1^a + K_{32}u_2^a + K_{33}u_1^b + K_{34}u_2^b$$

$$F_2^b = K_{41}u_1^a + K_{42}u_2^a + K_{43}u_1^b + K_{44}u_2^b$$

Em forma matricial $\boxed{F = Ku}$:

$$\begin{bmatrix} F_1^a \\ F_2^a \\ F_1^b \\ F_2^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^a \\ u_2^a \\ u_1^b \\ u_2^b \end{bmatrix}$$

Como linearizar um modelo?

Polinômios de Taylor

Podemos aproximar uma função f suficientemente derivável pelo polinômio

$$P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

para x suficientemente próximo de x_0 .

Como linearizar um modelo?

Polinômios de Taylor

Podemos aproximar uma função f suficientemente derivável pelo polinômio

$$P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

para x suficientemente próximo de x_0 .

Aproximação Linear

Para valores de x suficientemente próximos de x_0 , uma função f derivável pode ser aproximada por

$$L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Linearização do vetor Força

- Note que L e $\vec{e}_{ab}$ dependem de $\vec{u}^a$ e $\vec{u}^b$

$$\vec{F}^b = \frac{AE}{L_0}(L - L_0)\vec{e}_{ab}$$

Linearização do vetor Força

- Note que L e $\vec{e}_{ab}$ dependem de $\vec{u}^a$ e $\vec{u}^b$

$$\vec{F}^b = \frac{AE}{L_0}(L - L_0)\vec{e}_{ab}$$

- Precisamos de uma aproximação de primeira ordem:

$$\vec{F}^b(\vec{u}^a, \vec{u}^b) \approx \underbrace{\vec{F}^b(0, 0)}_0 + \frac{\partial \vec{F}^b}{\partial u_1^a} u_1^a + \frac{\partial \vec{F}^b}{\partial u_2^a} u_2^a + \frac{\partial \vec{F}^b}{\partial u_1^b} u_1^b + \frac{\partial \vec{F}^b}{\partial u_2^b} u_2^b$$

Linearização do vetor Força

- Note que L e $\vec{e}_{ab}$ dependem de $\vec{u}^a$ e $\vec{u}^b$

$$\vec{F}^b = \frac{AE}{L_0}(L - L_0)\vec{e}_{ab}$$

- Precisamos de uma aproximação de primeira ordem:

$$\vec{F}^b(\vec{u}^a, \vec{u}^b) \approx \underbrace{\vec{F}^b(0, 0)}_0 + \frac{\partial \vec{F}^b}{\partial u_1^a} u_1^a + \frac{\partial \vec{F}^b}{\partial u_2^a} u_2^a + \frac{\partial \vec{F}^b}{\partial u_1^b} u_1^b + \frac{\partial \vec{F}^b}{\partial u_2^b} u_2^b$$

- Após calcular algumas derivadas parciais obtemos que

$$\vec{F}^b \approx -\frac{AE}{L_0^2} \left[-\underbrace{(X_1^b - X_1^a)}_{d_1} u_1^a - \underbrace{(X_2^b - X_2^a)}_{d_2} u_2^a + \underbrace{(X_1^b - X_1^a)}_{d_1} u_1^b + \underbrace{(X_2^b - X_2^a)}_{d_2} u_2^b \right] \vec{e}_{ab}^0$$

Aproximação Linear

► Fazendo $\vec{e}_{ab}^0 = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ e $k = \frac{AE}{L_0^3}$, temos que:

$$\vec{F}^b \approx -k \left[-\underbrace{(X_1^b - X_1^a)}_{d_1} u_1^a - \underbrace{(X_2^b - X_2^a)}_{d_2} u_2^a + \underbrace{(X_1^b - X_1^a)}_{d_1} u_1^b + \underbrace{(X_2^b - X_2^a)}_{d_2} u_2^b \right] \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Aproximação Linear

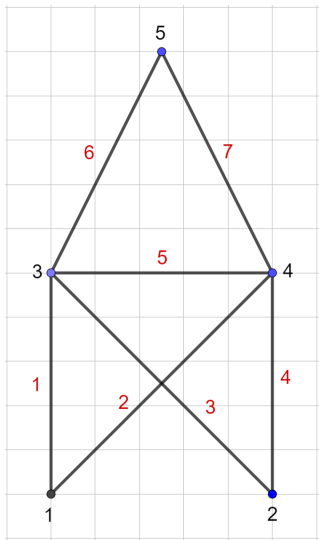
- Fazendo $\vec{e}_{ab}^0 = \frac{1}{L_0} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ e $k = \frac{AE}{L_0^3}$, temos que:

$$\vec{F}^b \approx -k \left[\underbrace{-(X_1^b - X_1^a)}_{d_1} u_1^a - \underbrace{(X_2^b - X_2^a)}_{d_2} u_2^a + \underbrace{(X_1^b - X_1^a)}_{d_1} u_1^b + \underbrace{(X_2^b - X_2^a)}_{d_2} u_2^b \right] \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

- Sistema linear de uma barra:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_1^a \\ F_2^a \\ F_1^b \\ F_2^b \end{bmatrix}}_{\underline{F}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} kd_1^2 & kd_1 d_2 & -kd_1^2 & -kd_1 d_2 \\ kd_1 d_2 & kd_2^2 & -kd_1 d_2 & -kd_2^2 \\ -kd_1^2 & -kd_1 d_2 & kd_1^2 & kd_1 d_2 \\ -kd_1 d_2 & -kd_2^2 & kd_1 d_2 & kd_2^2 \end{bmatrix}}_{\underline{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^a \\ u_2^a \\ u_1^b \\ u_2^b \end{bmatrix}}_{\underline{u}}$$

Caso global: exemplo



► Conectividade

Conec	
1	3
1	4
3	2
4	2
3	4
3	5
4	5

► Coordenadas

Coord	
0.0	0.0
1.0	0.0
0.0	1.0
1.0	1.0
0.5	2.0

Caso global: exemplo

- ▶ Calcular a força que a treliça faz sobre o nó 5.

Caso global: exemplo

- Calcular a força que a treliça faz sobre o nó 5.

$$F_1^5(\vec{u}^1, \vec{u}^2, \dots, \vec{u}^5) = \left(-\underline{\underline{K}}^{(6)} \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_1^5 \\ u_2^5 \end{bmatrix} \right)_3 + \left(-\underline{\underline{K}}^{(7)} \begin{bmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \\ u_1^5 \\ u_2^5 \end{bmatrix} \right)_3$$

Caso global: exemplo

- Calcular a força que a treliça faz sobre o nó 5.

$$F_1^5(\vec{u}^1, \vec{u}^2, \dots, \vec{u}^5) = \left(-\underline{\underline{K}}^{(6)} \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_1^5 \\ u_2^5 \end{bmatrix} \right)_3 + \left(-\underline{\underline{K}}^{(7)} \begin{bmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \\ u_1^5 \\ u_2^5 \end{bmatrix} \right)_3$$

$$F_1^5 = - \left(K_{31}^{(6)} u_1^3 + K_{32}^{(6)} u_2^3 + K_{31}^{(7)} u_1^4 + K_{32}^{(7)} u_2^4 + (K_{33}^{(6)} + K_{33}^{(7)}) u_1^5 + (K_{34}^{(6)} + K_{34}^{(7)}) u_2^5 \right)$$

Caso global: exemplo

- Calcular a força que a treliça faz sobre o nó 5.

$$F_1^5(\vec{u}^1, \vec{u}^2, \dots, \vec{u}^5) = \left(-\underline{\underline{K}}^{(6)} \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_1^5 \\ u_2^5 \end{bmatrix} \right)_3 + \left(-\underline{\underline{K}}^{(7)} \begin{bmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \\ u_1^5 \\ u_2^5 \end{bmatrix} \right)_3$$

$$F_1^5 = - \left(K_{31}^{(6)} u_1^3 + K_{32}^{(6)} u_2^3 + K_{31}^{(7)} u_1^4 + K_{32}^{(7)} u_2^4 + (K_{33}^{(6)} + K_{33}^{(7)}) u_1^5 + (K_{34}^{(6)} + K_{34}^{(7)}) u_2^5 \right)$$

- De forma análoga

$$F_2^5 = - \left(K_{41}^{(6)} u_1^3 + K_{42}^{(6)} u_2^3 + K_{41}^{(7)} u_1^4 + K_{42}^{(7)} u_2^4 + (K_{43}^{(6)} + K_{43}^{(7)}) u_1^5 + (K_{44}^{(6)} + K_{44}^{(7)}) u_2^5 \right)$$

Caso global: exemplo

- Calcular a força que a treliça faz sobre o nó 4.

$$F_1^4 = \begin{pmatrix} -\underline{\underline{K}}^{(2)} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^4 \\ u_2^4 \end{bmatrix} \end{pmatrix}_3 + \begin{pmatrix} -\underline{\underline{K}}^{(4)} \begin{bmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix} \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} -\underline{\underline{K}}^{(5)} \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_1^4 \\ u_2^4 \end{bmatrix} \end{pmatrix}_3 + \begin{pmatrix} -\underline{\underline{K}}^{(7)} \begin{bmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \\ u_1^5 \\ u_2^5 \end{bmatrix} \end{pmatrix}_1$$

Caso global: exemplo

- Calcular a força que a treliça faz sobre o nó 4.

$$F_1^4 = \left(-\underline{\underline{K}}^{(2)} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_1^1 \\ u_2^4 \\ u_1^4 \\ u_2^4 \end{bmatrix} \right)_3 + \left(-\underline{\underline{K}}^{(4)} \begin{bmatrix} u_1^4 \\ u_1^4 \\ u_2^2 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix} \right)_1 + \left(-\underline{\underline{K}}^{(5)} \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_1^3 \\ u_2^4 \\ u_1^4 \\ u_2^4 \end{bmatrix} \right)_3 + \left(-\underline{\underline{K}}^{(7)} \begin{bmatrix} u_1^4 \\ u_1^4 \\ u_2^5 \\ u_1^5 \\ u_2^5 \end{bmatrix} \right)_1$$

$$F_1^4 = -K_{31}^2 u_1^1 - K_{32}^2 u_2^1 - K_{13}^4 u_1^2 - K_{14}^4 u_2^2 - K_{31}^5 u_1^3 - K_{32}^5 u_2^3 - \\ -(K_{33}^2 + K_{11}^4 + K_{33}^5 + K_{11}^7) u_1^4 - (K_{32}^2 + K_{12}^4 + K_{34}^5 + K_{12}^7) u_2^4 - K_{13}^7 u_1^5 - K_{14}^7 u_2^5$$

- De forma análoga

$$F_1^4 = -K_{41}^2 u_1^1 - K_{42}^2 u_2^1 - K_{23}^4 u_1^2 - K_{24}^4 u_2^2 - K_{41}^5 u_1^3 - K_{42}^5 u_2^3 - \\ -(K_{43}^2 + K_{21}^4 + K_{43}^5 + K_{21}^7) u_1^4 - (K_{42}^2 + K_{22}^4 + K_{44}^5 + K_{22}^7) u_2^4 - K_{23}^7 u_1^5 - K_{24}^7 u_2^5$$

Sistema linear global

- ▶ Aplicando as condições de equilíbrio em toda a estrutura resulta no seguinte sistema de equações lineares:

$$\underline{F}_{glo} = -\underline{K}_{glo}\underline{u}_{glo}$$

- ▶ $\underline{F}_{glo} = [F_1^1 \quad F_2^1 \quad F_1^2 \quad F_2^2 \quad \cdots \quad F_1^5 \quad F_2^5]^T$
- ▶ $\underline{u}_{glo} = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad \cdots \quad u_1^5 \quad u_2^5]^T$
- ▶ $\underline{K}_{glo} =$

Sistema linear global

- ▶ Aplicando as condições de equilíbrio em toda a estrutura resulta no seguinte sistema de equações lineares:

$$\underline{F}_{glo} = -\underline{K}_{glo} \underline{u}_{glo}$$

- ▶ $\underline{F}_{glo} = [F_1^1 \quad F_2^1 \quad F_1^2 \quad F_2^2 \quad \dots \quad F_1^5 \quad F_2^5]^T$

- ▶ $\underline{u}_{glo} = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad \dots \quad u_1^5 \quad u_2^5]^T$

- ▶ $\underline{K}_{glo} =$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 + K_{21}^2 & K_{12}^1 + K_{22}^2 & 0 & 0 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & K_{13}^2 & K_{14}^2 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 + K_{22}^2 & K_{22}^1 + K_{22}^2 & 0 & 0 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & K_{23}^2 & K_{24}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}^3 + K_{43}^4 & K_{34}^3 + K_{44}^4 & K_{31}^3 & K_{32}^3 & K_{31}^4 & K_{32}^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{43}^3 + K_{44}^4 & K_{44}^3 + K_{44}^4 & K_{41}^3 & K_{42}^3 & K_{41}^4 & K_{42}^4 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^3 & K_{34}^3 & K_{33}^5 + K_{43}^6 & K_{34}^5 + K_{44}^6 & K_{33}^7 & K_{34}^7 & K_{33}^6 & K_{34}^6 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^3 & K_{44}^3 & K_{43}^5 + K_{44}^6 & K_{44}^5 + K_{44}^6 & K_{43}^7 & K_{44}^7 & K_{43}^6 & K_{44}^6 \\ K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^4 & K_{34}^4 & K_{31}^5 & K_{32}^5 & K_{33}^8 & K_{34}^8 & K_{31}^6 & K_{32}^6 \\ K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^4 & K_{44}^4 & K_{41}^5 & K_{42}^5 & K_{43}^8 & K_{44}^8 & K_{41}^6 & K_{42}^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{31}^6 & K_{32}^6 & K_{31}^9 & K_{32}^9 & K_{33}^7 & K_{34}^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{41}^6 & K_{42}^6 & K_{41}^9 & K_{42}^9 & K_{43}^7 & K_{44}^7 \end{bmatrix}$$