

Cálculo Numérico – SME0104 – ICMC-USP

Lista 8: Integração Numérica

Professor: Afonso Paiva

Lembrete (informação que vai estar disponível na prova)

Regra do Trapézio

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_N)] + h \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)$$

$$|R(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \|f''\|_\infty$$

Regra 1/3 de Simpson

$$\int_{x_0}^{x_{2N}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{2N-2}) + 4f(x_{2N-1}) + f(x_{2N})]$$

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x) dx \approx \frac{h}{6} \sum_{k=1}^N [f(x_{k-1}) + 4f(\bar{x}_k) + f(x_k)] \quad \text{com} \quad \bar{x}_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$$

$$|R(f)| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$$

Quadratura de Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n \omega_k f(\xi_k)$$

$$R(f) = \frac{2^{2n+3} [(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(c), \quad c \in (-1, 1)$$

n	ξ_k	ω_k
1	± 0.5773502691	1.0000000000
2	± 0.7745966692 0.0000000000	0.5555555555 0.8888888888
3	± 0.8611363115 ± 0.3399810435	0.3478548451 0.6521451548
4	± 0.9061798459 ± 0.5384693101 0.0000000000	0.2369268850 0.4786286704 0.5688888888

Parte 1: Exercícios Teóricos

1. A Regra do Trapézio aplicada a $\int_0^2 f(x) dx$ fornece o valor 5 e a Regra do Ponto Médio fornece o valor 4. Que valor resulta a Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson?
2. Determine h de modo que a Regra do Trapézio forneça o valor de:

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx ,$$

com erro inferior a 0.5×10^{-6} .

3. Achar o número mínimo de intervalos que se pode usar para, utilizando a Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson, obter

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} dx ,$$

com 4 casas decimais corretas.

4. A Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson utilizando quatro pontos consecutivos igualmente espaçados x_0, x_1, x_2 e x_3 é dada por

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx \frac{3}{8}h [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] ,$$

Dados $3N$ sub-intervalos igualmente espaçados, deduza a Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson Generalizada para aproximar $\int_{x_0}^{x_{3N}} f(x) dx$.

5. Determine uma Regra de Quadratura que seja exata para polinômios de grau menor ou igual a 2, da forma

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1)$$

6. Determine uma Regra de Quadratura que seja exata para polinômios de grau menor ou igual a 3, da forma

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(1) + \omega_2 f'(-1) + \omega_3 f'(1) .$$

Em seguida, utilizá-la para calcular um valor aproximado da integral:

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

Parte 2: Exercícios Práticos e Computacionais (MATLAB ou Octave)

1. Calcular:

$$\int_{1.0}^{1.3} \sqrt{x} dx$$

utilizando os dados da tabela:

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
\sqrt{x}	1.000	1.0247	1.0488	1.0723	1.0954	1.1180	1.1401

(a) Usando a Regra do Trapézio.

(b) Usando a Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson.

2. Calcular:

$$\int_0^{0.8} \cos(x) dx,$$

utilizando os dados da tabela:

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\cos(x)$	1.000	0.995	0.980	0.955	0.921	0.877	0.825	0.764	0.696

(a) Usando a Regra do trapézio com $h = 0.2$.

(b) Usando a Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson com $h = 0.4$.

3. A velocidade v de um foguete lançado do chão verticalmente (para cima, é claro) foi tabelada como se segue:

t (seg)	0	5	10	15	20
v (m/s)	0	60.6	180.1	341.6	528.4

Usando a Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson calcular a altura do foguete após 20 segundos.

4. Usando a Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson, calcular:

$$\int_1^{1.6} \ln(x) dx,$$

utilizando os dados da tabela:

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$\ln(x)$	0.000	0.095	0.182	0.262	0.336	0.405	0.470

5. ~~Calcular:~~

$$(a) \int_{-1}^1 (x^3 + x^2 + x + 1) dx \quad (b) \int_{-2}^0 (x^5 - 1) dx$$

~~Utilizando a Quadratura de Gauss-Legendre que forneça o valor exato (com o mínimo de pontos necessários) da integral.~~

6. ~~Calcular:~~

$$(a) \int_0^3 e^{-x^2} \sin(x) dx \quad (b) \int_0^{2\pi} x \cos(x) dx$$

~~Usando Quadratura de Gauss-Legendre que seja exata para polinômios de grau menor ou igual a 6.~~

7. ~~Compare as respostas dos exercícios 1 a 6 da Parte 2, com as respostas fornecidas pelas funções em MATLAB discutidas em sala de aula.~~

8. ~~Implemete a sua própria função no MATLAB para a Regra do Trapézio e compare a resposta com a função trapz.~~

9. ~~Considere a curva paramétrica dada por:~~

$$s(t) = (\cos(t), \sin(t), t), \quad t \in [a, b].$$

~~(a) Plote a curva acima no MATLAB no intervalo $[0, 4\pi]$;~~

~~(b) O comprimento de arco de uma curva é dado por~~

$$c = \int_a^b \|s'(t)\|_2 dt \quad \text{com} \quad \|(x, y, z)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

~~Dados n pontos e o intervalo $[a, b]$. Faça uma função em MATLAB que calcule o comprimento de arco da curva $s(t)$ usando a Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson e que tenha como protótipo $c = \text{comp_arco}(a, b, n)$.~~

10. Dados uma função integrável $f(x)$ em $[a, b]$ e N o número de sub-intervalos igualmente espaçados em $[a, b]$. Faça uma função em MATLAB para a Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson (ver Exercício 4 da Parte 1) que tenha o seguinte protótipo $I = \text{simpson38f}(\text{fun}, a, b, N)$.