Cálculo Numérico – SME0104 – ICMC-USP

Lista 7: Método dos Mínimos Quadrados

Professor: Afonso Paiva

Lembrete (informação que vai estar disponível na prova)

$$\begin{pmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_0, \phi_n \rangle \\ \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_1, \phi_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_n, \phi_0 \rangle & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \phi_0, f \rangle \\ \langle \phi_1, f \rangle \\ \vdots \\ \langle \phi_n, f \rangle \end{pmatrix}$$

Parte 1: Exercícios Teóricos

---

1. Considere a função $f(x) = x^{-4}$, $x \in [0,1]$.

   (a) Mostre que a aplicação $\langle f, g \rangle = \int_0^1 x^2 f(x) g(x) dx$ é um produto interno em $\mathcal{C}([0,1])$;

   (b) Usando o método dos mínimos quadrados, aproximar a função $f(x)$ por um polinômio do tipo $P(x) = ax^2 + bx^4$, usando o produto interno definido no item anterior. **Obs.:** Note que a base do subespaço nesse caso é $\{x^2, x^4\}$.

2. Utilizando o método dos mínimos quadrados, usando o produto interno usual em $\mathcal{C}([0,1])$, aproximar a função:

$$f(x) = \left(x^3 - 1\right)^2, \; x \in [0,1],$$

   (a) Por uma reta $P_1(x)$ com a restrição $P(1) = 0$;

   (b) Por uma parábola $P_2(x)$.

3. Dada a função $y = f(x)$ tabelada:

x	-4	-2	0	2	4
y	2	0	-1	3	5

   (a) Usando o método dos mínimos quadrados, aproxime a função acima por uma reta $P_1(x)$;

   (b) Usando o método dos mínimos quadrados, aproxime a função acima por uma parábola $P_2(x)$ com a seguinte restrição $P_2(1) = 1$.

4. Considere a tabela:

x	-2	-1	1	2
y	1	-3	1	9

(a) Pelo método dos mínimos quadrados, ajuste à tabela as funções:

$$g_1(x) = ax^2 + bx, \qquad g_2(x) = cx^2 + d\,.$$

(b) Qual das funções fornece o melhor ajuste segundo o critério dos mínimos quadrados? Justifique. **Dica:** use o erro de truncamento.

~~5. É necessário calcular a melhor aproximação (sob restrições), no sentido de mínimos quadrados, da função $f(x) = \ln(x)/(x^2+10)$ no intervalo $x \in [5, 15]$, utilizando o produto interno usual em $\mathcal{C}([5,15])$. A aproximação $F(x)$ procurada *deve ser um polinômio de grau 1 e satisfazer a restrição de ter a mesma integral que* $f(x)$, isto é,~~

$$\int_5^{15} f(x)\,dx = \int_5^{15} F(x)\,dx\,.$$

~~Para isto, são necessárias as integrais~~

$$I_0 = \int_5^{15} f(x)\,dx \qquad I_1 = \int_5^{15} xf(x)\,dx$$

~~que poderiam ser aproximadas numericamente. Utilize os seguintes valores aproximados para as integrais: $I_0 = 0.23$ e $I_1 = 2$.~~

~~6. Deseja-se aproximar uma função $f(x)$, $x \in [a, b]$, usando o método dos mínimos quadrados por uma função~~

$$g(x) = x^2 \ln\left(\frac{x^3}{a + bx^2}\right).$$

~~(a) Qual a função a ser minimizada?~~

~~(b) Qual o sistema linear a ser resolvido?~~

~~7. Como você faria para aproximar uma função $f(x)$ tabelada (discreta) usando o método dos mínimos quadrados por uma função do tipo:~~

$$g(x) = \frac{a}{1 + b\cos(x)}\,.$$

Parte 2: Exercícios Práticos e Computacionais (MATLAB ou Octave)

1. Seja $f(x) = 1/(x+2)$, $x \in [-1, 1]$. Usando o método dos mínimos quadrados e o produto interno usual em $\mathcal{C}([-1, 1])$, aproximar a função $f(x)$ por uma parábola.

2. Usando o método dos mínimos quadrados, aproximar $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ no intervalo $[0, 1]$ por um polinômio do 3° grau, usando os valores de x com incremento de 0.1 e o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$.

3. ~~Dada a função dada pela tabela, com os respectivos pesos w_i:~~

~~w~~	~~0.2~~	~~1.1~~	~~0.8~~	~~0.3~~	~~0.5~~	~~1.3~~
~~x~~	~~0.0~~	~~1.5~~	~~2.1~~	~~3.0~~	~~4.3~~	~~5.2~~
~~y~~	~~-1.0~~	~~0.0~~	~~3.5~~	~~8.0~~	~~7.0~~	~~4.5~~

~~Usando o método dos mínimos quadrados ponderado, aproxime a função amostrada acima por um polinômio do tipo: $P(x) = a + bx^3$.~~

4. Sete experimentos foram feitos para determinar a durabilidade de um certo tipo de pneus. Os resultados foram os seguintes:

Experimento (i)	1	2	3	4	5	6	7
Durabilidade (D_i) [km]	56000	52000	55000	62000	60000	63000	61000

Pelas condições dos experimentos, os engenheiros decideram associar a cada um deles um peso diferente:

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 1.5, \quad w_3 = 2, \quad w_4 = 2.5, \quad w_5 = 3, \quad w_6 = 4, \quad w_7 = 5$$

Calcular a melhor estimativa D^*, no sentido de mínimos quadrados, para a durabilidade dos pneus considerados, utilizando o produto escalar

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{7} w_i f_i g_i$$

Dica: Note que a função a ser aproximada é uma função constante.

5. ~~Em um experimento químico os seguintes resultados foram obtidos para a evolução do pH com o tempo:~~

~~tempo [seg]~~	~~0~~	~~10~~	~~20~~	~~40~~	~~60~~	~~90~~	~~150~~	~~300~~
~~pH~~	~~0~~	~~0.5~~	~~1.0~~	~~2.4~~	~~3.3~~	~~4.8~~	~~5.6~~	~~7.0~~