Cálculo Numérico – SME0104 – ICMC-USP

Lista 6: Interpolação Polinomial

Professor: Afonso Paiva

Lembrete (informação que vai estar disponível na prova)

Fórmula de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \, \ell_k(x) \quad \text{com} \quad \ell_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Fórmula de Newton

$$P_n(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + \cdots + (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

Erro na Interpolação

$$|E_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \, \|f^{(n+1)}\|_\infty \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|$$

$$\|E_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \, \|f^{(n+1)}\|_\infty \, (b-a)^{n+1}$$

~~Nós de Chebyshev~~

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right), \qquad i = 0, \ldots, n$$

~~Spline Cúbica Natural~~

$$S_{3,i}(x) = a_i \, (x - x_i)^3 + b_i \, (x - x_i)^2 + c_i \, (x - x_i) + d_i \qquad \text{com}$$

$$a_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{6h_i}, \quad b_i = \frac{z_i}{2}, \quad c_i = -\frac{h_i \, z_{i+1}}{6} - \frac{h_i \, z_i}{3} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}, \quad d_i = y_i$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ h_0 & u_1 & h_1 & & & & \\ & h_1 & u_2 & h_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} & \\ & & & & h_{n-2} & u_{n-1} & h_{n-1} \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad u_i = 2(h_i + h_{i-1}), \quad v_i = w_i - w_{i-1}, \quad w_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i)$$

$$\|f - S_3\|_\infty \leq \frac{5\,h^4}{384} \|f^{(4)}\|_\infty \quad \text{com} \quad h = \max_i \{|x_i - x_{i+1}|\}$$

Parte 1: Exercícios Teóricos

1. Dados $(n+1)$ pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ onde os pontos $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ são igualmente espaçados, isto é, $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, n-1$. Mostre que o polinômio de interpolação na forma de Lagrange pode ser escrito da forma:

$$P_n(u) = P_n(x_0 + uh) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(u) \quad \text{com} \quad L_k(u) = \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} (u-i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} (k-i)}.$$

2. Mostre que $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_2, x_1, x_0]$.

3. ~~Dados $(n+1)$ pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, quais as hipóteses para que o polinômio interpolador exista e seja único? Se os valores das derivadas $\{y_0', y_1', \cdots, y_n'\}$ estão disponíveis, qual será o grau máximo do único polinômio de Hermite P tal que $P(x_i) = y_i$ e $P'(x_i) = y_i'$?~~

4. Sabendo-se que a equação $x - \exp(-x) = 0$ tem uma raiz em $[0, 1]$, pode-se aproximar tal raiz utilizando polinômio de interpolação sobre 3 pontos. Forneça um limitante superior para o erro de aproximação da raiz.

5. Considerando a função $f(x) = \sqrt{x}$ tabelada:

x	1.00	1.10	1.15	1.25	1.30
$f(x)$	1.000	1.048	1.072	1.118	1.140

   (a) Determinar o valor aproximado de $\sqrt{1.12}$ usando polinômio de interpolação de Newton sobre 3 pontos.

   (b) Calcular um limitante superior para o erro.

6. Considere a função $f(x) = \cos(x)$ definida no intervalo $[0, 1]$. Suponha que f deva ser aproximada por um polinômio de grau n de tal forma que o erro cometido seja menor que 10^{-4}. Supondo uma amostragem de f com pontos igualmente espaçados, qual o menor valor de n para que tal erro seja atingido?

7. ~~Dados $(n+1)$ pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, quais são as restrições que se deve impor para obter uma interpolação por spline cúbico?~~

8. ~~Seja $f(x) = \exp(x)$ forneça um limitante superior para $\|f - S_3\|_\infty$, onde S_3 é uma spline cúbica que interpola $f(x)$ em 5 pontos igualmente espaçados.~~

9. Sejam $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ e $P_1(x)$ o polinômio de interpolação (linear) de $f(x)$ em $[a, b]$. Mostre que:

$$\|f(x) - P_1(x)\|_\infty \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Parte 2: Exercícios Práticos e Computacionais (MATLAB ou Octave)

1. Considere a tabela:

x	1	3	4	5
$f(x)$	0	6	24	60

   (a) Determinar o polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, sobre todos os pontos.
   (b) Calcular $f(3.5)$.

2. Construir o polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, para a função $y = \text{sen}(\pi x)$, escolhendo os pontos: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$ e $x_2 = \frac{1}{2}$.

3. Seja a função tabelada:

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	0	6	24	60

   (a) Determinar o polinômio de interpolação de Newton sobre todos os pontos.
   (b) Calcular $f(0.5)$.

4. Dada a função tabelada:

x	0.0	1.0	1.5	2.5	3.0
$f(x)$	1.0	0.5	0.4	0.286	0.25

   Calcular $f(0.5)$ usando:

   (a) o polinômio de interpolação de Newton sobre 2 pontos (interpolação linear).
   (b) o polinômio de interpolação de Newton sobre 3 pontos (interpolação quadrática).

5. Sabendo-se que a equação $x^4 + 6x^2 - 1 = 0$ tem uma raiz em $[0, 1]$, determinar o valor aproximado dessa raiz usando polinômio de interpolação de Newton sobre 3 pontos.

~~6. Considerando as funções tabeladas:~~

x	0.0	0.5
$f(x)$	1.0000	2.0000
$f'(x)$	2.7183	5.4366

x	0.1	0.2	0.3
$g(x)$	-0.2900	-0.5608	-0.8140
$g'(x)$	-2.8019	-2.6159	-2.4534

~~Determinar o polinômio de interpolação de Hermite para cada uma das funções acima usando todos os pontos.~~

~~7. Dada a função $f(x) = \exp(x)\,\text{sen}(5x)$ cuja derivada é $f'(x) = \exp(x)(\text{sen}(5x) + 5\cos(5x))$ no intervalo $[0, 1]$.~~

   ~~(a) Calcule uma aproximação para $f(0.6)$ usando a interpolação de Hermite com 4 igualmente espaçados;~~
   ~~(b) Calcule uma aproximação para $f(0.6)$ usando a interpolação de Hermite com 4 nós de Chebyshev.~~

8. ~~Um carro viajando em linha reta é cronometrado em alguns pontos. Os dados coletados das observações são fornecidos na tabela abaixo:~~

~~tempo (s)~~	~~3~~	~~5~~
~~posição (m)~~	~~225~~	~~380~~
~~velocidade~~	~~77~~	~~81~~
~~aceleração~~	~~×~~	~~11~~

~~Usando a interpolação de Hermite forneça uma aproximação da velocidade do carro no instante de tempo~~ $\cancel{t = 4\,s}$.

9. ~~Dada a função tabelada~~

~~x~~	~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~5~~
~~$f(x)$~~	~~2.0~~	~~3.0~~	~~7.0~~	~~4.0~~

~~Utilize uma spline linear interpolante para calcular uma aproximação de:~~

$$\cancel{\int_1^5 f(x)\,dx}$$

10. ~~Forneça uma aproximação para~~ $\cancel{f(0.25)}$ ~~utilizando uma spline cúbica natural, interpolante da função dada pela tabela abaixo:~~

~~x~~	~~0.00~~	~~0.50~~	~~1.00~~	~~1.50~~	~~2.00~~
~~$f(x)$~~	~~3.00~~	~~1.86~~	~~−0.56~~	~~−4.20~~	~~−9.05~~

11. ~~Refaça o exercício anterior, substituindo a condições de contorno naturais~~ $\cancel{(S_3(x_0) = S_3(x_n) = 0)}$ ~~pelas *condições de contorno fixadas*, isto é,~~ $\cancel{S_3'(x_0) = f'(x_0)}$ ~~e~~ $\cancel{S_3'(x_n) = f'(x_n)}$. ~~Use~~ $\cancel{f'(x_0) = 1}$ ~~e~~ $\cancel{f'(x_n) = 2}$.

12. Implemente uma função em MATLAB que calcule o polinômio de interpolação $P_n(x)$ usando a forma de Lagrange para pontos igualmente espaçados (ver Exercício 1 da Parte 1). **Considerações:** a função deve ter o seguinte protótipo `function y = lagrange_igual(xi,yi,x)`, onde onde os parâmetros de entrada `xi` e `yi` são vetores contendo os pontos e valores a serem interpolados e `x` é um vetor contendo os pontos onde o polinômio interpolador deve ser avaliado.

13. ~~Dados um conjunto pontos distintos~~ $\cancel{\{x_i\}}$, ~~valores de uma função avaliada nestes pontos~~ $\cancel{\{y_i\}}$, ~~e as derivadas~~ $\cancel{\{y_i'\}}$ ~~desta função nos mesmos pontos.~~

    (a) ~~Implemente uma função em MATLAB que calcule o polinômio de interpolação de Hermine na forma de Newton. **Considerações:** a função deve ter o seguinte protótipo `function y = hermite(xi,yi,dyi,x)`, onde onde os parâmetros de entrada `xi` e `yi` são vetores contendo os pontos e valores a serem interpolados, `dyi` o vetor dos valores de~~ $\cancel{y_i'}$ ~~e `x` é um vetor contendo os pontos onde o polinômio interpolador deve ser avaliado.~~

    (b) ~~Reimplemente o exercício anterior, usando o polinômio de Hermite na *forma de Lagrange*:~~

$$\cancel{P(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i A_i(x) + y_i' B_i(x) \right] , \quad \text{com}}$$

$$\cancel{A_i(x) = \left[1 - 2(x - x_i)\ell_i'(x_i)\right] \ell_i^2(x) \quad \text{e} \quad B_i(x) = (x - x_i)\ell_i^2(x)}$$

14. ~~Implemente uma função em MATLAB que calcule splines cúbicas com condições de contorno fixadas (ver Exercício 11).~~

15. O polinômio de interpolação $P_n(x)$ pode ser representado na *forma baricêntrica*:

$$P_n(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x-x_k} y_k}{\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x-x_k}} \quad \text{com} \quad w_k = \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i) \right)^{-1} , \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

Implemente uma função em MATLAB que calcule $P_n(x)$ na forma baricêntrica e compare (plotando gráficos) com forma de Lagrange (Exercício 12) usando a função $f(x) = 1/(1+25x^2)$, $x \in [-1, 1]$, com 5, 10 e 15 pontos igualmente espaçados.

16. ~~Considere quatro pontos uniformemente espaçados sobre o semicírculo, os quais podem ser calculados como:~~

```
t = linspace(0,pi/2,4);
x = sin(t); y = cos(t);
```

~~Faça um código em MATLAB que interpole os quatro pontos utilizando:~~

~~(a) Polinômio de Lagrange (Exercício 12);~~

~~(b) Polinômio de Hermite (Exercício 13);~~

~~(c) Spline cúbico natural;~~

~~(d) Hermite cúbico em cada um dos três subintervalos.~~

~~Compare graficamente (plotando gráficos) os resultados obtidos com cada um dos métodos e calcule o erro de aproximação. Qual dos métodos resulta em menor erro?~~