

Lista 5: Zero de Funções

Lembrete (informação que vai estar disponível na prova)

Método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - J^{-1}F(\mathbf{x}_k)$$

Método da Secante

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Parte 1: Exercícios Teóricos

1. Justifique que a função:

$$f(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 - 3,$$

possui uma raiz no intervalo  $[0, 2]$ . Ela é única?

- ~~2. Quais são as condições para que o método do ponto fixo  $x_k = g(x_k)$  convirja?~~  
~~3. Considere as funções  $f, h \in \mathcal{C}^1([a, b])$  e uma função  $g(x)$  definida como:~~

$$~~g(x) = x + h(x)f(x)~~$$

~~Assumindo que  $\alpha$  é ponto fixo de  $g$ , isto é,  $\alpha = g(\alpha)$  e que  $h(\alpha) \neq 0$ , mostre que se  $g'(\alpha) = 0$  então o processo iterativo de ponto fixo acima é de fato o Método Newton.~~

- ~~4. Seja  $a$  uma constante positiva dada e  $g(x) = 2x - ax^2$ .~~
- ~~(a) Mostre que se o **Método do Ponto Fixo** converge para um limite diferente de zero, então o limite é  $\alpha = 1/a$ . Dessa forma, o inverso de um número pode ser encontrado utilizando-se apenas subtrações e multiplicações.~~
- ~~(b) Encontre um intervalo em torno de  $1/a$  para o qual o **Método do Ponto Fixo** converge, desde que  $x_0$  esteja nesse intervalo.~~

- ~~5. Mostre que a raiz quadrada de um número  $a$  pode ser aproximada pela fórmula:~~

$$~~\sqrt{a} \approx x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)~~$$

~~Em que intervalo de valores a convergência do método é garantida? Utilize a fórmula acima para aproximar  $\sqrt{10}$ .~~

~~6. Considere as seguintes funções:~~

~~a)  $g_1(x) = 2x - 1,$~~

~~b)  $g_2(x) = x^2 - 2x + 2,$~~

~~c)  $g_3(x) = x^2 - 3x + 3.$~~

~~Verifique que 1 é ponto fixo de todas estas funções. Qual delas você escolheria para obter a raiz 1, utilizando o processo iterativo  $x_{k+1} = g(x_k)$ ? O que se pode falar da ordem de convergência do processo iterativo escolhido?~~

~~7. Considere a equação  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ , cujas raízes são:  $\alpha_1 = 0.5$  e  $\alpha_2 = 2$ . Considere ainda os processos iterativos:~~

~~(a)  $x_{k+1} = \frac{2x_k^2 + 2}{5},$~~

~~(b)  $x_{k+1} = \sqrt{\frac{5x_k}{2}} - 1.$~~

~~Qual dos dois processos você utilizaria para obter a raiz  $\alpha_1$ ? Por que?~~

~~8. Para cada uma das equações a seguir, determine um intervalo  $[a, b]$  na qual as iterações do **Método do Ponto Fixo** serão convergentes. Estime o número de iterações necessárias para se obter aproximações com precisão de  $10^{-5}$ .~~

~~(a)  $x = \frac{2 - e^x + x^2}{3}$~~

~~(b)  $x = \frac{1}{2}[\text{sen}(x) + \cos(x)]$~~

~~9. Utilize o **Método de Newton** para aproximar, com precisão de  $10^{-4}$ , o valor de  $x$  que produz o ponto mais próximo de  $(1, 0)$  no gráfico de  $y = x^2$ . Dica: minimize  $[\text{dist}(x)]^2$ , onde  $\text{dist}(x)$  representa a distância de  $(x, x^2)$  ao ponto  $(1, 0)$ .~~

~~10. Suponha que  $\alpha$  seja um zero de  $f$  de multiplicidade  $m$ , onde  $f \in \mathcal{C}^m$  em um intervalo aberto que contém  $\alpha$ . Mostre que o seguinte **Método do Ponto Fixo** tem  $g'(\alpha) = 0$ :~~

$$~~g(x) = x - m \frac{f(x)}{f'(x)}.~~$$

~~11. Suponha que  $\alpha$  seja um zero de  $f$  de multiplicidade  $m$ , onde  $f \in \mathcal{C}^m$  em um intervalo aberto que contém  $\alpha$ . Mostre que o seguinte **Método do Ponto Fixo** tem  $g'(\alpha) = \frac{m-1}{m}$ .~~

$$~~g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.~~$$

---

## Parte 2: Exercícios Práticos e Computacionais (MATLAB ou Octave)

---

1. Utilize o **Método da Bisseção** e encontre uma raiz aproximada, com erro relativo  $e_k = |x_{k+1} - x_k| / |x_{k+1}|$  menor do que  $10^{-1}$  para as seguintes funções nos respectivos intervalos:

(a)  $f(x) = 2 \cos(x) - \frac{e^x}{2}$  em  $I = [0, \frac{\pi}{2}]$

(b)  $g(x) = 3 \ln(x) - \frac{x^2}{2}$  em  $I = [2, 2.3]$

~~2. A função  $f(x) = x^2 + x - 0.25$  possui uma raiz real intervalo  $[-0.4, 0.4]$ . A seqüência produzida por  $x_{k+1} = -x_k^2 + 0.25$  será convergente para esta raiz? Exiba os 5 primeiros termos da seqüência gerada a partir da condição inicial  $x_0 = 0.2$ .~~

3. Usando o **Método de Newton**, com erro absoluto  $e_k = |x_{k+1} - x_k|$  inferior a  $10^{-2}$  e chute inicial  $x_0 = 1.5$ , determine uma raiz das seguintes equações:

(a)  $5x^3 + x^2 - 12x + 4 = 0$

(b)  $\sin(x) - e^x = 0$

4. O valor de  $\pi$  pode ser obtido através da resolução das seguintes equações:

(a)  $\sin(x) = 0$

(b)  $\cos(x) + 1 = 0$

Aplique o **Método de Newton** com  $x_0 = 3$  e com erro relativo  $e_k = |x_{k+1} - x_k| / |x_{k+1}|$  inferior a  $0.5 \times 10^{-2}$  e compare os resultados obtidos.

5. Usando o **Método da Secante**, com erro absoluto  $e_k = |x_{k+1} - x_k|$  inferior a  $10^{-2}$  e chute iniciais  $x_0 = 1.5$  e  $x_1 = 1.6$ , determine uma raiz das seguintes funções:

(a)  $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$

(b)  $f(x) = e^{-x^2} - \cos(x) = 0$

6. Considere o **Método de Newton** como implementado abaixo:

```
function [x,k] = newton(func,dfunc,x,tol,kmax)
% dfunc: derivada de func(x)
% x: chute inicial x0
k = 0;
dx = func(x)/dfunc(x)
while abs(dx) > tol && k < kmax
    x = x - dx;
    dx = func(x)/dfunc(x);
    k = k+1;
end
```

Reescreva o código acima substituindo o comando `while` pelo comando `for`. Assegure que o loop `for` termine assim que a tolerância for atingida.

7. Encontre um valor aproximado para  $\sqrt{3}$  com precisão de  $10^{-4}$  utilizando o **Método de Newton**.
8. Determine quantas iterações são necessárias, empregando-se o **Método de Newton** com  $p_0 = \pi/4$ , para encontrar uma raiz para a função  $f(x) = \cos(x) - x$  com precisão de  $10^{-15}$ .
9. O polinômio de 4º grau  $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$  tem dois zeros reais, um em  $[-1, 0]$  e outro em  $[0, 1]$ . Encontre uma aproximação para os dois zeros reais utilizando o **Método de Newton**. Compare o resultado obtido com a saída do comando `roots` do MATLAB.
- ~~10. Implemente o **Método de Newton** com o processo de deflação implícita em MATLAB e utilize para determinar todas as raízes de  $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$ . Compare os resultados usando o processo de deflação explícita.~~
- ~~11. A função  $f(x) = (x - 1)^{11} \ln(x)$  possui uma raiz  $\alpha = 1$  de multiplicidade 12. Calcule uma aproximação para essa raiz usando o **Método de Newton** com chute inicial  $x_0 = 4$ . Implemente em MATLAB uma solução para que o **Método de Newton** convirja quadraticamente para  $\alpha$ .~~
12. Resolva os sistemas não-lineares abaixo usando o **Método de Newton**, com erro absoluto  $e_k = \|x_{k+1} - x_k\|_2$  como critério de parada e precisão  $10^{-6}$  :

$$(a) \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 4 \end{cases} \quad \text{com } (x_0, y_0) = (2, 1)$$

$$(b) \begin{cases} x^3 + 2z = 1 \\ \text{sen}(x) + 3y = 0 \\ xy + z^2 = 0 \end{cases} \quad \text{com } (x_0, y_0, z_0) = (0.6, -0.2, 0.3)$$

13. Uma solução aproximada de um sistema não-linear pode ser obtida usando a seguinte implementação do **Método de Newton** no MATLAB:

```
function x = newton_sis(F,J,x,tol)
for kmax=1:1000
    v = J(x)\F(x);
    x = x - v;
    if (norm(v)<tol) return end;
end
```

Use uma chamada da função acima no MATLAB para resolver o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x - \cos(xy) + \sqrt{xz} & = & 0.5 \\ x^3 - 15(z + 2)^2 + \text{sen}(yz) & = & -1.1 \\ \exp(-xy) + 5z & = & -9.4 \end{cases}$$

14. Considere a seguinte função:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \left( (1.5 - x(1 - y))^2 + (2.25 - x(1 - y^2))^2 + (2.625 - x(1 - y^3))^2 \right)$$

utilize o **Método de Newton** para encontrar um ponto de mínimo de  $f$ . Utilizando como ponto inicial  $(x_0, y_0) = (3, 0.5)$ , qual o ponto de convergência do **Método de Newton**? Você pode afirmar que o ponto de convergência é um mínimo? O que acontece quando  $(x_0, y_0) = (8, 0.8)$ ? O ponto de convergência é um ponto de mínimo?

~~15. Utilize o processo de deflação implícita e o método de Newton para determinar todas as raízes de  $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$ . O mesmo para  $x^5 + 1.5x^4 - 4.29x^3 - 9.035x^2 - 3.21x + 1.035 = 0$ . Observe que neste último caso há tanto raízes simples quanto múltiplas. O que fazer para manter a ordem de convergência do **Método de Newton**?~~

16. Considere duas curvas em  $\mathbb{R}^2$  parametrizadas por

$$\mathbf{x}(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad \text{e} \quad \mathbf{y}(s) = (s, s^2).$$

Encontre os dois pontos em  $\mathbb{R}^2$  onde uma mesma reta tangencie as curvas  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  simultaneamente. Para isso, é preciso impor que as tangentes a cada curva nas posições dadas pelos parâmetros  $t_0$  e  $s_0$  estejam na mesma direção, isto é,  $\mathbf{x}'(t_0) \times \mathbf{y}'(s_0) = 0$ , e que a tangente em um dos pontos esteja alinhada com a reta  $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ , ou seja,  $(\mathbf{y}(s_0) - \mathbf{x}(t_0)) \times \mathbf{y}'(s_0) = 0$ . Isso resulta em um sistema não-linear cuja solução analítica é de difícil obtenção. Utilize finalmente o **Método de Newton** para encontrar os valores de  $t_0$  e  $s_0$  e finalmente responder a questão colocada no início do exercício. Desenhe as duas curvas, a reta tangente e as soluções obtidas pelo **Método de Newton**.