Cálculo Numérico – SME0104 – ICMC-USP

Lista 4: Autovalores e Autovetores

Parte 1: Exercícios Práticos e Teóricos

---

1. ~~Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ ortogonal, mostre que $\Lambda(\mathbf{A}) = \{-1, 1\}$.~~

2. ~~Mostre que se $\mathbf{v}$ é autovetor das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ em $\mathcal{M}(n,n)$, então $\mathbf{v}$ é autovetor de $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.~~

3. ~~Mostre que uma matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n,n)$ e sua transposta $\mathbf{A}^\top$ possuem os mesmos autovalores.~~

4. Resolva o sistema linear abaixo usando a Decomposição QR:

$$\begin{cases} 5x + x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

5. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Determinar uma aproximação do raio espectral $\rho(\mathbf{A})$ usando apenas a primeira iteração pelo Método das Potências.

6. Considere as matrizes abaixo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Usando o Método das Potência determinar o autovalor de maior valor absoluto e seu autovetor correspondente com precisão de 10^{-2} das matrizes acima. **Obs.:** estime o erro com o teste do alinhamento.

(b) ~~Usando o Método das Potência Inversa determinar o autovalor de menor valor absoluto e seu autovetor correspondente com precisão de 10^{-2} das matrizes acima. **Obs.:** estime o erro com o teste do alinhamento.~~

7. ~~Use o Método da Potência Inversa com deslocamento para calcular o autovalor negativo de maior módulo da matriz tridiagonal:~~

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

~~A matriz **A** é conhecida como *matriz de Wilkinson* de ordem 4 e gerada no MATLAB com o comando `A = wilkinson(4)`.~~

8. Dada as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) ~~Use os discos de Gershgorin para verificar se $-1 \in \Lambda(\mathbf{A})$ e $14 \in \Lambda(\mathbf{B})$.~~

(b) Determine todos os autovalores das matrizes acima usando o Método de Francis com precisão de 10^{-2}. **Obs.:** estime o erro com $\max_{i<j}\{|a_{ij}|\}$.

Lembrete: formulário disponível na prova

Decomposição QR com Gram-Schmidt

$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\cdots|\mathbf{a}_n]$
$\mathbf{v}_k = \mathbf{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1}(\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{a}_k)\mathbf{q}_i$
$\mathbf{q}_k = \mathbf{v}_k / \|\mathbf{v}_k\|_2$
$r_{ij} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{a}_j,$ se $i \neq j$
$r_{ii} = \|\mathbf{v}_i\|_2$

Método das Potências

$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{y}^{(k-1)}$
$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)}/\|\mathbf{x}^{(k)}\|_2$
$\lambda_1^{(k)} = \mathbf{y}^{(k)} \cdot \mathbf{A}y^{(k)}$

Método da Potência Inversa

$\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k-1)}$
$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)}/\|\mathbf{x}^{(k)}\|_2$
$\lambda_n^{(k)} = \mathbf{y}^{(k)} \cdot \mathbf{A}\mathbf{y}^{(k)}$

Método de Francis

$\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{R}_{k-1}$
$\mathbf{A}_k = \mathbf{R}_{k-1}\mathbf{Q}_{k-1}$