Cálculo Numérico – SME0104 – ICMC-USP

Lista 3: Sistemas Lineares – Métodos Iterativos

Parte 1: Exercícios Práticos e Teóricos

---

1. Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

   a) Verifique o critério das linhas.

   b) Resolva o sistema linear utilizando o Método de Jacobi com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0.7, -1.6, 0.6)^\top$ e com erro relativo de $\varepsilon < 10^{-2}$.

2. Usando o Método de Jacobi, obter solução do sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

   com três casas decimais correta.

3. Dado o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 20 \\ 7x_1 + x_2 + 10x_3 = 30 \end{cases}$$

   a) Verificar a possibilidade de aplicação do Método de Jacobi;

   b) Se possível, resolvê-lo pelo método do item **(a)**, obtendo o resultado com erro relativo de $\varepsilon < 10^{-2}$.

4. Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

   mostrar que, reordenando as equações e as incógnitas (linhas e colunas), podemos fazer com que o critério de Sassenfeld seja satisfeito, mas não o das linhas.

5. Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} 5x + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

a) Verifique o critério de Sassenfeld.

b) Se caso algum dos critério **(a)** for satisfeito, resolva o sistema usando o Método de Gauss-Seidel com $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^\top$ e erro relativo de $\varepsilon < 10^{-2}$.

6. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 5x & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ -x & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 10x_3 & = & -1 \end{cases}$$

a) Verificar a possibilidade de aplicação do Método de Gauss-Seidel, usando o critério de Sassenfeld.

b) Se possível, resolvê-lo pelo método do item **(a)** com erro relativo de $\varepsilon < 10^{-2}$.

7. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 8x & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & = & 1 \end{cases}$$

Sabendo que os métodos iterativos podem ser escritos da forma $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}x^{(k)} + \mathbf{g}$, determine:

a) A matriz $\mathbf{C}$ e o vetor $\mathbf{g}$ para o Método de Gauss-Jacobi;

b) A matriz $\mathbf{C}$ e o vetor $\mathbf{g}$ para o Método de Gauss-Seidel.

~~8. Dado o sistema linear:~~

$$\begin{cases} 100x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 100x_2 & = & 100 \end{cases}$$

~~Calcule a função quadrática dada por $F(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$ e mostre que o ponto de mínimo desta função é solução do sistema dado.~~

~~9. Resolva o sistema linear abaixo:~~

$$\begin{cases} 10x_1 & + & x_2 & & & = & 11 \\ x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ & & x_2 & + & 10x_3 & = & 1 \end{cases}$$

~~Usando o Método dos Gradientes com erro relativo inferior a 10^{-1}.~~

~~10. Deseja-se resolver um sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pelo Método dos Gradientes, onde:~~

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & a \end{pmatrix}, \quad \text{com} \quad a \in \mathbb{R}$$

~~**a)** Quais os valores possíveis para a?~~

~~**b)** Sendo $\mathbf{b} = (1,2,3)^\top$ e considerando $a = 0.4$, obtenha a solução do sistema com duas casas decimais corretas usando o Método dos Gradientes.~~

Parte 2: Exercícios Computacionais em MATLAB

1. O método SOR (*sucessive over-relaxation*), assim como Jacobi e Gauss-Seidel, é um método iterativo para resolver sistemas lineares $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Este método consiste em atualizar cada componente i do vetor de incógnitas $\mathbf{x}$ tomando a média ponderada entre o valor da iteração anterior $\mathrm{x}_i^{(k)}$ e o da iteração atualizada $\overline{\mathrm{x}}_i^{(k+1)}$ computada com Gauss-Seidel, isto é,

$$\overline{x}_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \color{red}{x_j^{(k+1)}} \color{black} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \tag{1}$$

$$\color{red}{x_i^{(k+1)}} \color{black} = \omega \overline{x}_i^{(k+1)} + (1-\omega) x_i^{(k)} \tag{2}$$

onde n é a dimensão da matriz. A ideia do método é escolher um valor para ω tal que acelere a taxa de convergência das iterações.

Observação: A variável $x_j^{(k+1)}$ está em vermelho para chamar a atenção de que todas as componentes j do vetor $\mathbf{x}^{(k+1)}$ que já foram calculadas entram no cálculo de $\overline{x}_i^{(k+1)}$ no passo (1) do SOR.

Lembrando que matriz $\mathbf{A}$ pode ser decomposta em uma matriz triangular inferior $\mathbf{L}$ e uma matriz triangular superior $\mathbf{R}$ com zero na diagonal , ou seja,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{R}\,. \tag{3}$$

O método de Gauss-Seidel em (1) e a atualização em (2) podem ser escritos na forma matricial

$$\overline{\mathbf{x}}^{(k+1)} = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}, \tag{4}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \omega \overline{\mathbf{x}}^{(k+1)} + (1-\omega)\mathbf{x}^{(k)}\,. \tag{5}$$

Com isso, faça o que se pede:

(a) Substitua a Equação (4) na Equação (5) e obtenha uma expressão na forma

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$$

para o método SOR (isto é, encontre a matriz $\mathbf{C}$ e o vetor $\mathbf{g}$).

(b) Implemente em MATLAB o método SOR. Sua *função* deverá ter o seguinte protótipo: `[x,niter,hres]=sor(A,b,w,tol,ktmax)`, onde

`x` é o vetor solução;
`niter` é o número de iterações que foram necessários para o método convergir;
`hres` é o histórico da norma do resíduo, isto é, `res(k,1)`= $\left\|\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}\right\|$;
`tol` é a tolerância da norma do resíduo;
`itmax` é o número máximo de iterações que a função pode executar.

(c) Considere os sistemas lineares $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$ onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & & & & \\ -1 & 3 & -1 & & & \\ & -1 & 3 & -1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & -1 & 3 & -1 \\ & & & & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{e} \qquad \mathbf{b} = [1, 2, 3, \ldots, n]^\top .$$

Considere $n = 20$, fixe a tolerância da norma do resíduo em 10^{-4} e, para cada sistema, construa um gráfico onde o eixo x é o número da iteração e o eixo y (em escala logarítmica) é o histórico da norma do resíduo dos métodos de Jacobi, Gauss-Seidel e SOR. No método SOR, faça com pelo menos 5 valores diferentes de ω no intervalo $(0, 1)$.

(d) Para qual/quais valor(es) de ω o método SOR é igual ao Gauss-Seidel?

~~2. No método dos gradientes pode acontecer que a direção adotada na iteração k ter sido usada em iterações anteriores. Para evitar que se tome várias vezes uma mesma direção do vetor resíduo $\mathbf{r}^{(k)}$ para a correção de $\mathbf{x}^{(k)}$, o *método dos gradientes conjugados* propõe uma modificação no método dos gradientes. Neste sentido, seja $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(n, n)$ SPD, o método dos gradientes conjugados sugere que, dada uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ para o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, vamos tomar um conjunto de *direções conjugadas* $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n-1}$ de modo que em até n iterações, teremos encontrado uma aproximação satisfatória para a solução do sistema. Dizemos que dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são *conjugados* se~~

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{Ay} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{Ax} = 0 .$$

~~Assim, para todo vetor $\mathbf{x}^{(0)}$, tomando $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}^{(0)}$ e $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$, o método do gradiente conjugado é dado, para $k \geq 0$, por~~

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{p}^{(k)} \cdot \mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)} \cdot \mathbf{Ap}^{(k)}},$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)},$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k \mathbf{Ap}^{(k)},$$

$$\beta_k = \frac{\mathbf{r}^{(k+1)} \cdot \mathbf{Ap}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)} \cdot \mathbf{Ap}^{(k)}},$$

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)}.$$

~~(a) Dado um conjunto de vetores conjugados não-nulos $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$, associado a uma matriz SPD $\mathbf{A} \in M(n, n)$. Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base do $\mathbb{R}^n$.~~

~~(b) Implemente em MATLAB o método do gradiente conjugado. Sua função deverá ter o seguinte protótipo: `x = grad_conj(A,b,x0,tol)`. Teste e compare a solução de sua função com o método dos gradientes e com a implementação do MATLAB do método do gradiente conjugado através do comando `x = pcg(A,b,tol)`.~~

Lembrete: formulário disponível na prova

Método de Gauss-Jacobi

$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$

Método de Gauss-Seidel

$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$

Método dos Gradientes

$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}$
$\alpha^{(k)} = (\mathbf{r}^{(k)} \cdot \mathbf{r}^{(k)})/(\mathbf{r}^{(k)} \cdot \mathbf{A}\mathbf{r}^{(k)})$
$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)}\mathbf{r}^{(k)}$