Cálculo Numérico – SME0104 – ICMC-USP

Lista 2: Sistemas Lineares – Métodos Diretos

Parte 0: Normas de Vetor e Matriz

---

1. Dadas as matrizes:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & -3 & 6 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -7 & 4 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcule $\|\mathrm{A}\|_1$, $\|\mathrm{B}\|_1$ e $\|\mathrm{C}\|_1$;
   (b) Calcule $\|\mathrm{A}\|_\infty$, $\|\mathrm{B}\|_\infty$ e $\|\mathrm{C}\|_\infty$;
   (c) Calcule $\|\mathrm{A}\|_F$, $\|\mathrm{B}\|_F$ e $\|\mathrm{C}\|_F$;
   (d) Compare seus resultados usando o MATLAB.

2. Dados os vetores:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcule $\|u\|_1$, $\|v\|_1$ e $\|w\|_1$;
   (b) Calcule $\|u\|_\infty$, $\|v\|_\infty$ e $\|w\|_\infty$;
   (c) Calcule $\|u\|_2$, $\|v\|_2$ e $\|w\|_2$;
   (d) Compare seus resultados usando o MATLAB.

Parte 1: Exercícios Teóricos

1. Considere o sistema $Ax = b$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; ; \; b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   Para que valores de α :

   (a) A matriz pode ser decomposta no produto LU? Justifique.

   ~~(b) O sistema pode ser resolvido por Cholesky? Justifique.~~

   (c) Considere $\alpha = 2$ e resolva o sistema pelo método da Eliminação de Gauss.

2. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Considere a matriz abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

   (a) Obtenha a sua decomposição LU;

   (b) Dê condições sob a, b, c e d para que a matriz A seja invertível.

3. Seja $A \in M(n, n)$ uma matriz que satisfaz as hipóteses da decomposição LU, então A pode ser decomposta da seguinte forma $A = LDU$, onde L e U são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, ambas com todos os elementos da diagonal iguais a 1, e D é uma matriz diagonal. Além disso, $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$. Determine os coeficientes das matrizes L, D e U em termos dos coeficientes de A.

4. ~~Supondo A uma matriz SPD e que satisfaz as hipóteses da decomposição LU, então A pode ser decomposta da seguinte forma $A = LDL^\top$, onde L é uma matriz triangular inferior com todos os elementos da diagonal iguais a 1, e D é uma matriz diagonal cujos elementos são todos positivos. Determine os coeficientes das matrizes L e D em termos dos coeficientes de A.~~

5. ~~Uma matriz $A \in \mathcal{M}(n, n)$ é *tridiagonal* quando $a_{ij} = 0$, para $|i - j| > 1$. Se $A \in \mathcal{M}(n, n)$ é tridiagonal e SPD, então A admite uma decomposição de Cholesky $A = HH^\top$, com H da forma:~~

$$H = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$

~~Encontre um algoritmo para o cálculo dos coeficientes α_i e β_i em função dos coeficientes a_{ij}. Deduza a partir daí a decomposição de Cholesky da matriz:~~

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Parte 2: Exercícios Práticos e Computacionais em MATLAB

1. Faça os exercícios dos slides.

2. Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 12 & -3 & 16 \\ -4 & 17 & -31 \end{pmatrix}$$

   (a) Verificar se A satisfaz as condições da decomposição LU;

   (b) Decompor A em LU;

   (c) Calcule o determinante de A usando a decomposição LU;

   (d) Resolver o sistema linear $Ax = b$, onde $b = (21, 54, -63)^\top$, usando a decomposição LU.

3. Aplicando-se o método da decomposição LU à matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \times & \times & 3 & \times \\ 4 & -1 & 10 & 8 \\ \times & -3 & 12 & 11 \\ 0 & -2 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

   obteve-se as matrizes:

$$L = \begin{pmatrix} \times & 0 & \times & \times \\ 2 & \times & \times & \times \\ 3 & 0 & \times & 0 \\ 0 & \times & 1 & \times \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} \times & -1 & \times & 5 \\ \times & 1 & \times & -2 \\ \times & 0 & 3 & -4 \\ 0 & \times & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

   Preencher os espaços "$\times$" com valores adequados.

4. ~~Aplicando-se o método de Cholesky à matriz, obteve-se:~~

$$A = \begin{pmatrix} \times & 2 & \times & \times \\ \times & 8 & 10 & -8 \\ 3 & 10 & 14 & -5 \\ \times & -8 & \times & 29 \end{pmatrix} = HH^\top, \quad \text{onde} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \times & 0 & 0 \\ \times & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & \times & 2 \end{pmatrix}.$$

   Preencher os espaços "$\times$" com valores adequados.

5. ~~Seja:~~

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

(a) ~~Verificar se A satisfaz as condições do método de Cholesky;~~

(b) ~~Decompor A usando o método de Cholesky;~~

(c) ~~Calcule o determinante de A usando a decomposição anterior;~~

(d) ~~Resolver o sistema linear $Ax = b$, onde $b = (0, 6, 5)^\top$, usando o método de Cholesky.~~

6. ~~Considere as matrizes:~~

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

~~Qual dos dois sistemas lineares $Ax = b$ ou $Bx = b$ pode ser resolvido utilizando o método de Cholesky, onde $b = (2, 1, , 5)^\top$. A partir da sua escolha resolva esse sistema linear.~~

7. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 6 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ -3x_1 + x_2 + 7x_3 = 11 \end{cases}$$

(a) Resolva-o usando o método de Eliminação de Gauss;

(b) Calcule o determinante de A usando o item anterior;

(c) Determine a decomposição LU da matriz A usando a Eliminação de Gauss.

8. Resolver o sistema linear abaixo utilizando o o método de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

9. Usando decomposição LU, calcule a invesa da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule a decomposição $PA = LU$;

(b) Calcule A^{-1} usando o método de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial.

11. Confira os resultados dos exercícios anteriores no MATLAB.

12. Faça uma função em MATLAB que dada uma matriz quadrada A, retorne 1, se A for SPD ou retorne 0, caso contrário. **Consideração:** o protótipo da função deve ser o seguinte `y = eh_spd(A)`.

13. Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}(n,n)$, implemente uma função em MATLAB que calcule a decomposição $A = LDU$ (ver Exercício 3 da Parte 1). **Consideração:** o protótipo da função deve ser o seguinte `[L,D,U] = ldu_decomp(A)`.

14. ~~Dada uma matriz A SPD, implemente uma função em MATLAB que calcule a decomposição $A = LDL^\top$ (ver Exercício 4 da Parte 1). **Consideração:** o protótipo da função deve ser o seguinte `[L,D] = ld_decomp(A)`.~~

15. ~~Faça uma função em MATLAB que calcule a decomposição de Cholesky para matrizes tridiagonais SPD (ver Exercício 5 da Parte 1).~~

Lembrete: formulário disponível na prova

Norma de Matriz

$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \{\sum_i |a_{ij}|\}$
$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \left\{\sum_j |a_{ij}|\right\}$
$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$

Decomposição LU

$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$
$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}\right)/u_{jj}$

~~Decomposição Cholesky~~

$h_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} h_{ks}^2}$
$h_{kj} = \left(a_{kj} - \sum_{s=1}^{j-1} h_{ks}h_{js}\right)/h_{jj}$

Eliminação de Gauss

$L_i^{(k+1)} \leftarrow L_i^{(k)} + m_{ik}L_k^{(k)}$
com $m_{ik} = -a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$