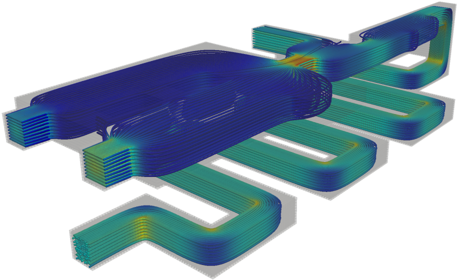


Visualização Científica – MAI5015

Representação de Dados

Afonso Paiva
ICMC-USP

27 de abril de 2020

Reamostragem de Dados

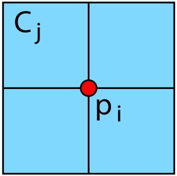
Motivação: em alguns casos uma função discreta $f(x)$ é conhecida apenas nas células (faces) C_j de uma malha $\mathcal{M}$ e em outros é conhecida apenas nos vértices $\mathbf{p}_i$. Como fazer essa conversão de $f(x)$ entre células e vértices?

Notação:

- f_j^c : $f(x)$ avaliada em uma célula C_j;
- f_i^v : $f(x)$ avaliada em um vértice $\mathbf{p}_i$;

Conversão célula $\rightarrow$ vértice

- Conhecemos os valores de f_j^c em cada célula C_j;
- Queremos calcular f_i^v em cada vértice $\mathbf{p}_i$;



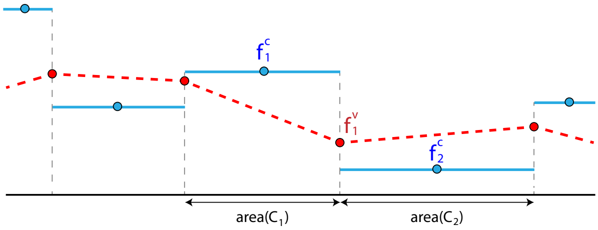
$$\|f^c - f^v\|^2 = \int_{C_k} (f^c - f^v)^2 \, dx \approx 0\,, \quad \forall C_k \in \mathcal{M}$$

$$f_i^v = \sum_{j \in cells(\mathbf{p}_i)} \mathrm{area}(C_j)\, f_j^c \Big/ \sum_{j \in cells(\mathbf{p}_i)} \mathrm{area}(C_j)$$

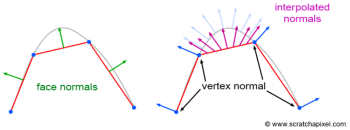
Reamostragem de Dados

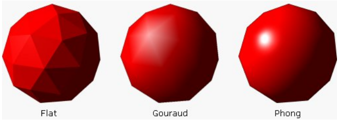
Conversão célula $\to$ vértice

- Interpolar os valores de f_i^v de volta para as células;



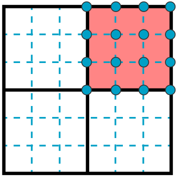
$$f_1^v = \frac{\mathrm{area}(C_1)\, f_1^c + \mathrm{area}(C_2)\, f_2^c}{\mathrm{area}(C_1) + \mathrm{area}(C_2)}$$





Conversão vértice $\rightarrow$ célula

- Conhecemos os valores de f_i^v em cada vértice $\mathbf{p}_i$;
- Queremos calcular f_j^c em cada célula C_j;



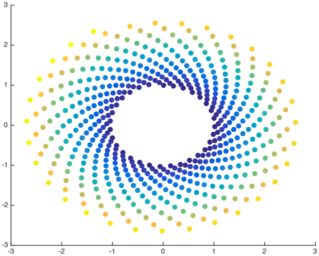
$$f_j^c = \frac{1}{|vts(C_j)|} \sum_{i \in vts(C_j)} f_i^v$$

Em que $|vts(C_j)|$ é a cardinalidade do conjunto dos vértices em C_j.

Visualização de Pontos Dispersos: *scatter plot*

Dada uma nuvem de pontos $\{\mathbf{p}_i, f_i\}$ como visualizar esse conjunto?

- $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$: posição
- $f_i = f(\mathbf{p}_i) \in \mathbb{R}$: atributo escalar (função discreta)



$$\mathbf{p}_i = \left(e^{\theta_i}\sin(10^2\theta_i), e^{\theta_i}\cos(10^2\theta_i)\right), \ \theta_i \in [0,1]$$

$$f_i = \|\mathbf{p}_i\|^2$$

`scatter(x,y,sz,f,'filled')`: scatter plot 2D

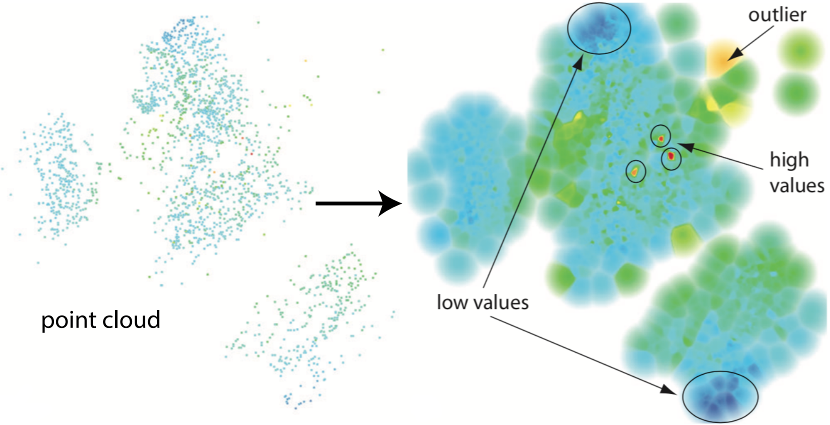
% `x,y`: vetores com as coordenadas dos pontos $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$;

% `sz`: tamanho dos círculos;

% `f`: atribui os valores de f_i para um mapa de cores;

Interpolação de Pontos Dispersos

Dada uma nuvem de pontos, como interpolar para um grid os valores de f_i?



Interpolação de Pontos Dispersos: RBF

Funções de Base Radial

- Função real $\phi_i : \mathbb{R}^d \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ cujo valor depende apenas da distância de um ponto ao centro $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$.
- *Radial Basis Function* (RBF)

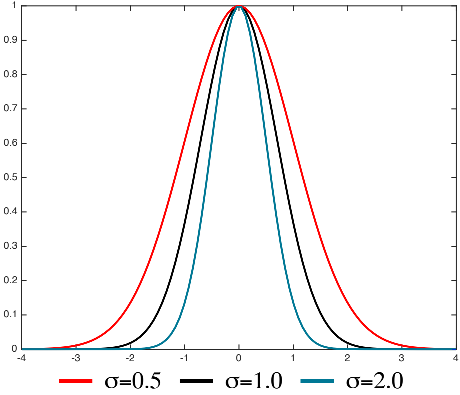
$$\boxed{\phi_i(\mathbf{p}) = \varphi(\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\|)}$$

Exemplos:

- Poli-harmônica: $\varphi(r) = r^k \,, \quad k = 1, 3, 5, \ldots$
- Distância inversa: $\varphi(r) = 1/(1 + r)$
- Gaussiana: $\varphi(r) = \exp(-\sigma r^2)$, com $\sigma > 0$

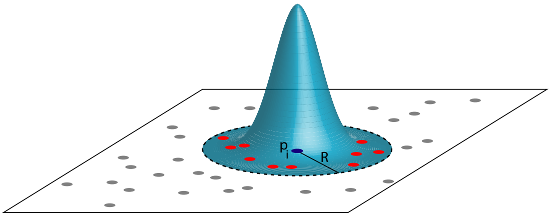
Interpolação de Pontos Dispersos: RBF

No caso da RBF Gaussiana, o parâmetro σ controla a forma (decaimento ou abertura)da RBF.



Suporte Compacto

- Podemos definir uma região com um raio de influência R e centro em $\mathbf{p}_i$, em que ϕ_i vale zero fora dessa região, i.e., $\varphi(r) = 0$, se $r \geq R$.



Aspectos Computacionais: precisamos de algoritmos de busca de pontos vizinhos eficientes (ex., KNN).

Interpolação de Shepard

$$F(\mathbf{p}) = \frac{\displaystyle\sum_{\mathbf{p}_i \in \mathcal{N}(\mathbf{x})} f_i\, \phi_i(\mathbf{p})}{\displaystyle\sum_{\mathbf{p}_i \in \mathcal{N}(\mathbf{p})} \phi_i(\mathbf{p})}$$

Em que $\mathcal{N}(\mathbf{p}) = \{\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d \ \mid\ \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}\| < R_{\mathbf{p}}\}$ é vizinhança de $\mathbf{p}$.

Exercício

Sejam $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_K\}$ os K vizinhos mais próximos de $\mathbf{p}$, então a Interpolação de Shepard pode ser escrita como:

$$F(\mathbf{p}) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{K} f_i \, \phi_i(\mathbf{p})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{K} \phi_i(\mathbf{p})}.$$

Faça uma função em MATLAB que dada uma nuvem de pontos $\{\mathbf{p}_i, f_i\}$ calcule a função $F(\mathbf{p})$ em um grid uniforme $n \times n$. Use como RBF a distância inversa.

Interpolação RBF

Dada uma nuvem de pontos $\{\mathbf{p}_i, f_i\}$ com N amostras, queremos obter uma função interpoladora $F(\mathbf{p})$, tal que $F(\mathbf{p}_i) = f_i$ e

$$\boxed{F(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \, \phi_j(\mathbf{p})}$$

Logo, para obter F temos que descobrir os valores de λ_j. Por outro lado,

$$f_i = F(\mathbf{p}_i) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \underbrace{\phi_j(\mathbf{p}_i)}_{\phi_{ij}}, \quad i = 1, \ldots, N$$

Interpolação RBF

Portanto, para descobrir os valores de λ_j, basta resolver o sistema linear abaixo:

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

Observação: a matriz $[\phi_{ij}]$ é simétrica positiva definida $\Rightarrow$ resolver sistema com Cholesky ou Gradiente Conjugado!

`D = pdist2(X,Y)`: distância entre os pontos dos conjuntos X e Y;
`% D`: matriz de distâncias;