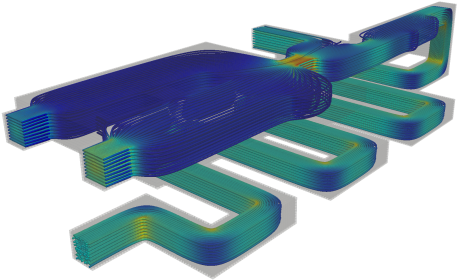


Visualização Científica – MAI5015

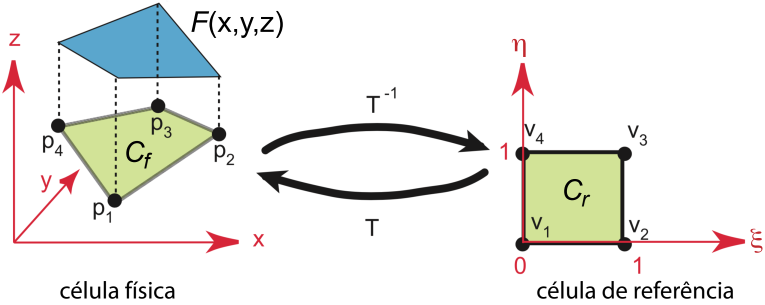
Representação de Dados

Afonso Paiva
ICMC-USP

27 de abril de 2020

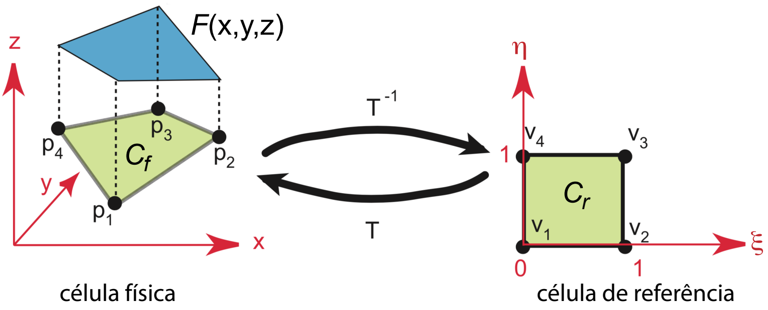
Interpolação em Células de um Grid

Objetivo: dada uma função f_i amostrada nos vértices i do grid, queremos calcular uma função interpoladora (linear por partes) F nas células do grid.



Interpolação em Células de um Grid

Objetivo: dada uma função f_i amostrada nos vértices i do grid, queremos calcular uma função interpoladora (linear por partes) F nas células do grid.

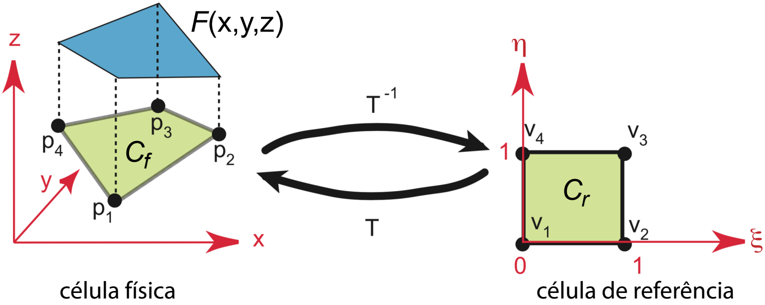


Célula de Referência (C_r)

- Vértices: $\mathbf{v}_1 = (0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0)$, $\mathbf{v}_3 = (1,1)$, $\mathbf{v}_4 = (0,1)$
- Coordenadas: (ξ, η)
- Função base local: $\Phi_1^1, \Phi_2^1, \Phi_3^1, \Phi_4^1 : C_r = [0,1]^2 \to \mathbb{R}$

Interpolação em Células de um Grid

Objetivo: dada uma função f_i amostrada nos vértices i do grid, queremos calcular uma função interpoladora (linear por partes) F nas células do grid.

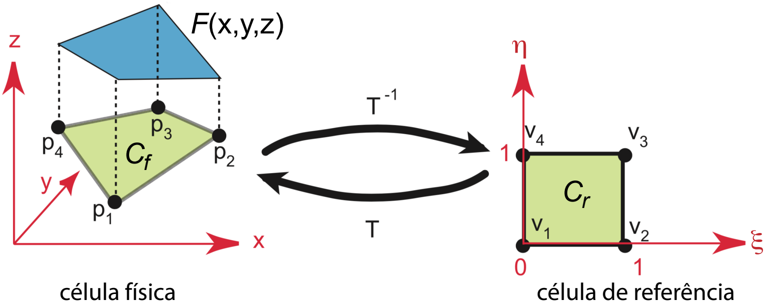


Célula Física (C_f)

- Vértices: $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$
- Coordenadas: (x, y, z)
- Função base global: $\phi_1^1, \phi_2^1, \phi_3^1, \phi_4^1 : C_f \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Interpolação em Células de um Grid

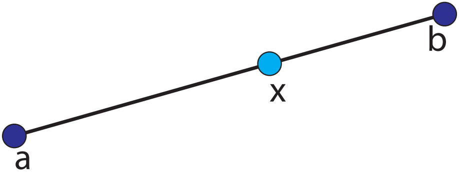
Objetivo: dada uma função f_i amostrada nos vértices i do grid, queremos calcular uma função interpoladora (linear por partes) F nas células do grid.



Célula Física (C_f)

- Interpolação: $F = \sum_{i=1}^{4} f_i \phi_i^1$
- Restrição: $F(\mathbf{p}_j) = f_j$
- Ortogonalidade: $\phi_i^1(\mathbf{p}_j) = \delta_{ij}$

Interpolação Linear



Qualquer ponto **x** no segmento $\overline{\mathbf{ab}}$ pode ser obtido da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}\,, \quad \text{com } t \in [0, 1]$$

Agora, dado um ponto **x** como obter o parâmetro t?

$$t = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|}$$

Interpolação Bilinear

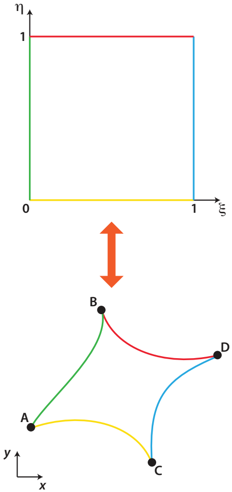
Precisamos mapear C_r em $C_f = \mathbf{ABCD}$ usando transformações conhecidas como projetores.

- Mapear os lados $\xi = 0$ e $\xi = 1$ nos lados $\mathbf{AB} \equiv \mathbf{r}(0, \eta)$ e $\mathbf{CD} \equiv \mathbf{r}(1, \eta)$, respectivamente, usando o projetor $\mathbf{P}_\xi$ definido como:

$$\mathbf{P}_\xi(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_\xi(\xi, \eta) = (1 - \xi)\, \mathbf{r}(0, \eta) + \xi\, \mathbf{r}(1, \eta)$$

- Mapear os lados $\eta = 0$ e $\eta = 1$ nos lados $\mathbf{AC} \equiv \mathbf{r}(\xi, 0)$ e $\mathbf{BD} \equiv \mathbf{r}(\xi, 1)$, respectivamente, usando o projetor $\mathbf{P}_\eta$ definido como:

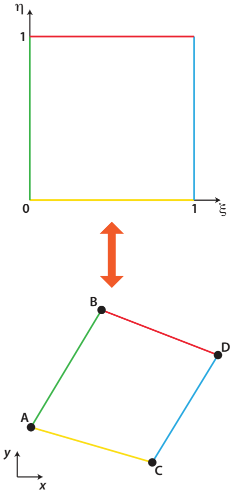
$$\mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_\eta(\xi, \eta) = (1 - \eta)\, \mathbf{r}(\xi, 0) + \eta\, \mathbf{r}(\xi, 1)$$



Interpolação Bilinear

A interpolação bilinear é feita usando a transformação composta $\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_\xi$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_\eta(\mathbf{P}_\xi(\mathbf{r})) &= \mathbf{P}_\eta((1-\xi)\,\mathbf{r}(0,\eta) + \xi\,\mathbf{r}(1,\eta)) \\
&= (1-\xi)\,\mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}(0,\eta)) + \xi\,\mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}(1,\eta)) \\
&= (1-\xi)\,[(1-\eta)\,\mathbf{r}(0,0) + \eta\,\mathbf{r}(0,1)] \\
&+ \xi\,[(1-\eta)\,\mathbf{r}(1,0) + \eta\,\mathbf{r}(1,1)] \\
&= (1-\xi)\,(1-\eta)\,\mathbf{r}(0,0) + (1-\xi)\,\eta\,\mathbf{r}(0,1) \\
&+ \xi\,(1-\eta)\,\mathbf{r}(1,0) + \xi\,\eta\,\mathbf{r}(1,1) \\
&= (1-\xi)\,(1-\eta)\,\mathbf{A} + (1-\xi)\,\eta\,\mathbf{B} \\
&+ \xi\,(1-\eta)\,\mathbf{C} + \xi\,\eta\,\mathbf{D}
\end{aligned}
$$



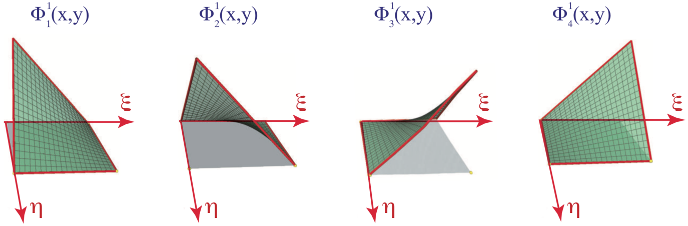
Problema: apenas os vértices **A**, **B**, **C** e **D** são preservados, mas as fronteiras de C_f são substituídas por segmentos de reta.

Interpolação Bilinear

Se $\mathbf{p} = (\xi, \eta) \in C_r$, então a função interpoladora pode ser escrita como:

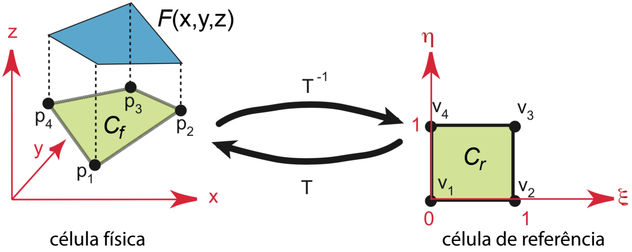
$$F(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{4} f_i \, \Phi_i^1(\xi, \eta) \quad \text{com}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1^1(\xi, \eta) &= (1-\xi)(1-\eta) \\
\Phi_2^1(\xi, \eta) &= (1-\xi)\eta \\
\Phi_3^1(\xi, \eta) &= \xi\eta \\
\Phi_4^1(\xi, \eta) &= \xi(1-\eta)
\end{aligned}$$



Como calcular $F(x, y, z)$ se $\mathbf{p} = (x, y, z) \in C_f$?

Putting it all together



Precisamos definir uma transformação de coordenadas $T : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ entre as células C_r e C_f, tal que $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{p}_i$. Se T é linear, temos que:

$$(x, y, z) = T(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{p}_i \, \Phi_i^1(\xi, \eta)$$

Putting it all together

Dada uma célula C_f, podemos construir uma aproximação de classe $\mathcal{C}^1$ por partes da seguinte forma:

$$F(x,y,z) = \sum_{i=1}^{4} f_i\, \phi_i^1(x,y,z) \quad \text{com}$$

$$\phi_i^1(x,y,z) = \begin{cases} \Phi_j^1(T^{-1}(x,y,z))\,, & \text{se } (x,y,z) \in C_f,\ \text{em que } \mathbf{p}_i = T(\mathbf{v}_j) \\ 0\,, & \text{se } (x,y,z) \notin C_f \end{cases}$$

Coordenadas Baricéntricas

Definição

O ponto $\mathbf{v}$ é o baricentro dos pontos $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ com pesos $w_1, \ldots, w_n$ se somente se

$$\mathbf{v} = \frac{w_1\mathbf{v_1} + \cdots + w_n\mathbf{v}_n}{w_1 + \cdots + w_n}$$

Os valores w_i são as coordendas baricéntricas de $\mathbf{v}$.

Coordenadas Baricéntricas Normalizadas

$$\lambda_i(\mathbf{v}) = \frac{w_i(\mathbf{v})}{w_1(\mathbf{v}) + \cdots + w_n(\mathbf{v})}$$

Coordenadas Baricêntricas

Definição

O ponto $\mathbf{v}$ é o baricentro dos pontos $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ com pesos $w_1, \ldots, w_n$ se somente se

$$\mathbf{v} = \frac{w_1\mathbf{v_1} + \cdots + w_n\mathbf{v}_n}{w_1 + \cdots + w_n}$$

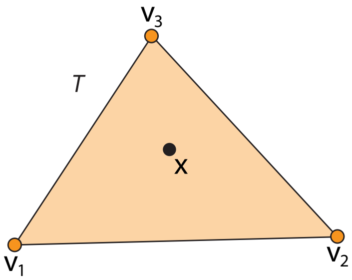
Os valores w_i são as coordendas baricêntricas de $\mathbf{v}$.

Coordenadas Baricêntricas Normalizadas

$$\lambda_i(\mathbf{v}) = \frac{w_i(\mathbf{v})}{w_1(\mathbf{v}) + \cdots + w_n(\mathbf{v})}$$

Logo, $\mathbf{v} = \sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i$ com $\sum_i \lambda_i = 1$, isto é, uma combinação convexa dos pontos $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$.

Coordenadas Baricêntricas no Triângulo



Objetivo: dado $\mathbf{x} \in T$, queremos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ tal que:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\,,$$

e

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3$$

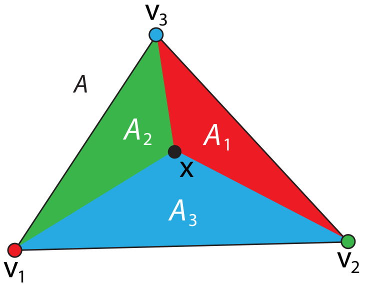
Coordenadas Baricêntricas no Triângulo

Precisamos resolver o sistema linear de ordem 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Pela Regra de Cramer a solução (única) é

$$\lambda_1 = \frac{A_1}{A}, \quad \lambda_2 = \frac{A_2}{A}, \quad \lambda_3 = \frac{A_3}{A}.$$



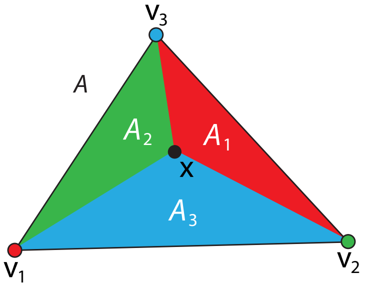
Coordenadas Baricéntricas no Triângulo

Precisamos resolver o sistema linear de ordem 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

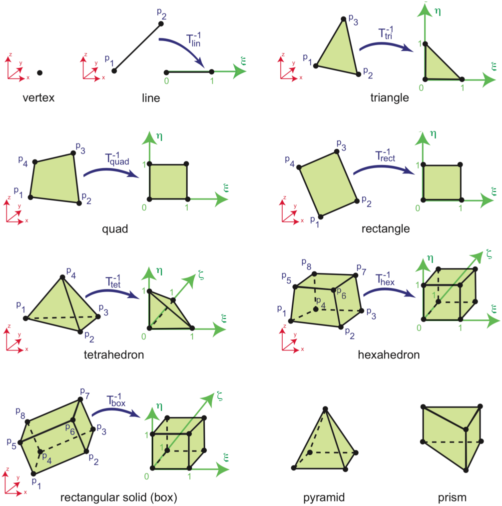
Pela Regra de Cramer a solução (única) é

$$\lambda_1 = \frac{A_1}{A}, \quad \lambda_2 = \frac{A_2}{A}, \quad \lambda_3 = \frac{A_3}{A}.$$



Observação: se um $\lambda_i < 0$ então **x** está fora do triângulo T.

Tipos de Células



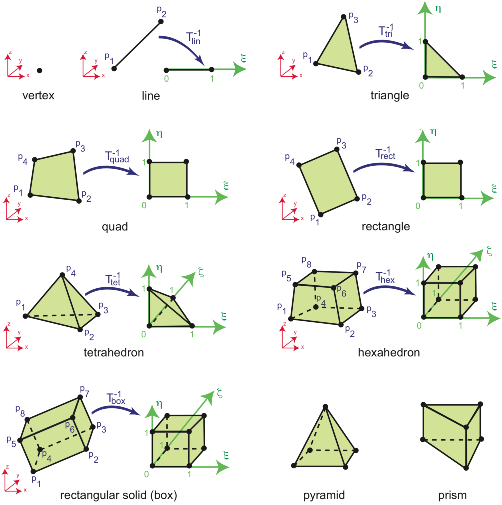
$$F(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{2} f_i\, \Phi_i^1(\, T_{lin}^{-1}(\mathbf{p}))$$

Segmentos de Reta

$$\begin{aligned} \Phi_1^1(\xi) &= 1 - \xi \\ \Phi_2^1(\xi) &= \xi \end{aligned}$$

$$T_{lin}^{-1}(\mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1\|}{\|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1\|}$$

Tipos de Células



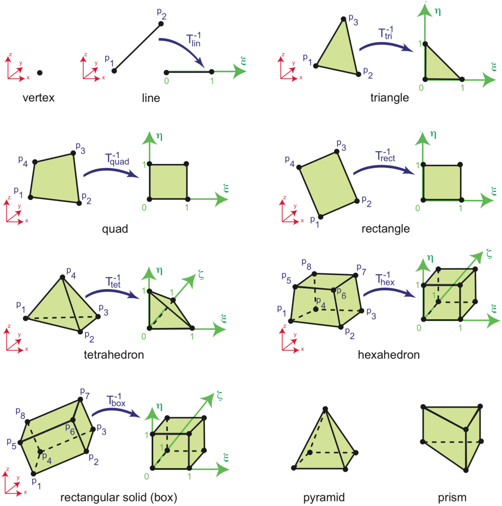
$$F(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{3} f_i \, \Phi_i^1\left(T_{tri}^{-1}(\mathbf{p})\right)$$

Triângulos

$$\begin{aligned} \Phi_1^1(\xi,\eta) &= 1 - \xi - \eta \\ \Phi_2^1(\xi,\eta) &= \xi \\ \Phi_3^1(\xi,\eta) &= \eta \end{aligned}$$

$$T_{tri}^{-1}(\mathbf{p}) = \left(\frac{A(\mathbf{p},\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)}{A(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3)}, \frac{A(\mathbf{p},\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3)}{A(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3)} \right) \quad \text{com} \quad \underbrace{A(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}_{\text{área}} = \frac{1}{2}\left\|(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})\right\|$$

Tipos de Células



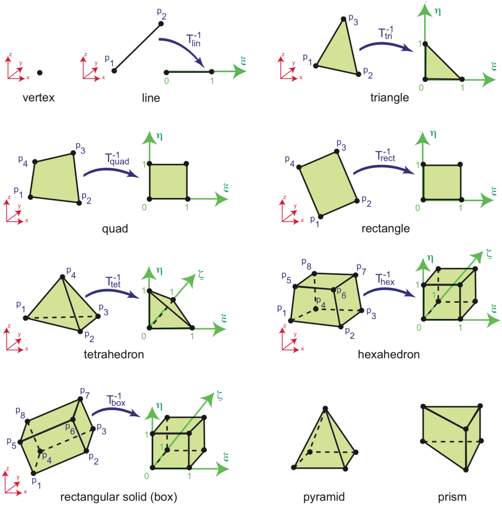
$$F(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{4} f_i \, \Phi_i^1 \left(T_{rect}^{-1}(\mathbf{p}) \right)$$

Retângulos

$$\begin{aligned}
\Phi_1^1(\xi,\eta) &= (1-\xi)(1-\eta) \\
\Phi_2^1(\xi,\eta) &= \xi(1-\eta) \\
\Phi_3^1(\xi,\eta) &= \xi\eta \\
\Phi_4^1(\xi,\eta) &= \eta(1-\xi)
\end{aligned}$$

$$T_{rect}^{-1}(\mathbf{p}) = \left(\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\cdot(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1)}{\|\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1\|^2}, \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\cdot(\mathbf{p}_4-\mathbf{p}_1)}{\|\mathbf{p}_4-\mathbf{p}_1\|^2} \right)$$

Tipos de Células



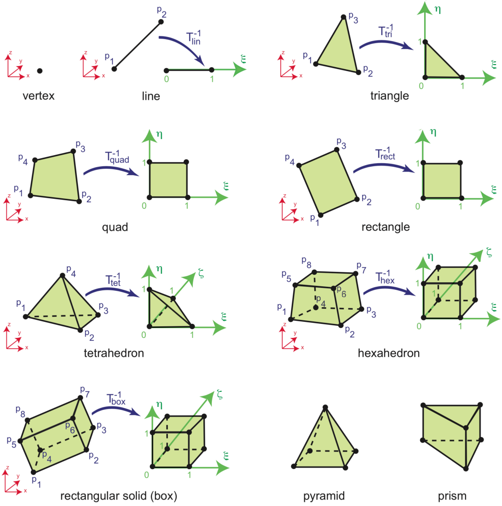
$$F(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{4} f_i \, \Phi_i^1 (T_{tet}^{-1} (\mathbf{p}))$$

Tetraedros

$$\begin{aligned}
\Phi_1^1(\xi, \eta, \zeta) &= 1 - \xi - \eta - \zeta \\
\Phi_2^1(\xi, \eta, \zeta) &= \xi \\
\Phi_3^1(\xi, \eta, \zeta) &= \eta \\
\Phi_4^1(\xi, \eta, \zeta) &= \zeta
\end{aligned}$$

$$T_{tet}^{-1}(\mathbf{p}) = \left(\frac{V(\mathbf{p}, \mathbf{p_1}, \mathbf{p_3}, \mathbf{p_4})}{V(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}, \mathbf{p_4})}, \frac{V(\mathbf{p}, \mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_4})}{V(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}, \mathbf{p_4})}, \frac{V(\mathbf{p}, \mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3})}{V(\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}, \mathbf{p_4})} \right) \text{ com } \underbrace{V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})}_{\textbf{volume}} = \frac{|\det(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{d} - \mathbf{a})|}{6}$$

Tipos de Células



$$F(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{8} f_i \, \Phi_i^1 (T_{box}^{-1}(\mathbf{p}))$$

Hexaedros

$$\begin{aligned}
\Phi_1^1(\xi,\eta,\zeta) &= (1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\
\Phi_2^1(\xi,\eta,\zeta) &= \xi(1-\eta)(1-\zeta) \\
\Phi_3^1(\xi,\eta,\zeta) &= \xi\eta(1-\zeta) \\
\Phi_4^1(\xi,\eta,\zeta) &= (1-\xi)\eta(1-\zeta) \\
\Phi_5^1(\xi,\eta,\zeta) &= (1-\xi)(1-\eta)\zeta \\
\Phi_6^1(\xi,\eta,\zeta) &= \xi(1-\eta)\zeta \\
\Phi_7^1(\xi,\eta,\zeta) &= \xi\eta\zeta \\
\Phi_8^1(\xi,\eta,\zeta) &= (1-\xi)\eta\zeta
\end{aligned}$$

$$T_{box}^{-1}(\mathbf{p}) = \left(\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\cdot(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1)}{\|\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1\|^2}, \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\cdot(\mathbf{p}_4-\mathbf{p}_1)}{\|\mathbf{p}_4-\mathbf{p}_1\|^2}, \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\cdot(\mathbf{p}_5-\mathbf{p}_1)}{\|\mathbf{p}_5-\mathbf{p}_1\|^2} \right)$$

Cálculo de Derivadas em Dados Discretos

Um conjunto discreto de dados $\mathcal{D} = \{\mathcal{M}, f_i, \Phi_i\}$ é formado pelos vértices $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$ e células C_i de uma malha $\mathcal{M}$, pela função amostrada $f_i = f(\mathbf{p}_i) \in \mathbb{R}$ e pelas funções base Φ_i. Assim, vamos calcular a derivada da função interpoladora F (reconstrução de f) em $\mathcal{D}$:

$$F(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{n} f_k \, \phi_k(\mathbf{p})$$

Cálculo de Derivadas em Dados Discretos

Um conjunto discreto de dados $\mathcal{D} = \{\mathcal{M}, f_i, \Phi_i\}$ é formado pelos vértices $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$ e células C_i de uma malha $\mathcal{M}$, pela função amostrada $f_i = f(\mathbf{p}_i) \in \mathbb{R}$ e pelas funções base Φ_i. Assim, vamos calcular a derivada da função interpoladora F (reconstrução de f) em $\mathcal{D}$:

$$F(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{n} f_k \, \phi_k(\mathbf{p}) \;\Rightarrow\; \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{n} f_k \, \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(\mathbf{p})$$

Cálculo de Derivadas em Dados Discretos

Um conjunto discreto de dados $\mathcal{D} = \{\mathcal{M}, f_i, \Phi_i\}$ é formado pelos vértices $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$ e células C_i de uma malha $\mathcal{M}$, pela função amostrada $f_i = f(\mathbf{p}_i) \in \mathbb{R}$ e pelas funções base Φ_i. Assim, vamos calcular a derivada da função interpoladora F (reconstrução de f) em $\mathcal{D}$:

$$F(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{n} f_k \, \phi_k(\mathbf{p}) \;\Rightarrow\; \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{n} f_k \, \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(\mathbf{p})$$

Pelo fato de $\phi_k(x_1, \ldots, x_d) = \Phi_k(T^{-1}(x_1, \ldots, x_d))$ com $T^{-1} : \xi_i = \xi_i(x_1, \ldots, x_d)$, temos:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{n} f_k \, \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}(\xi_1, \ldots, \xi_d)$$

Cálculo de Derivadas em Dados Discretos

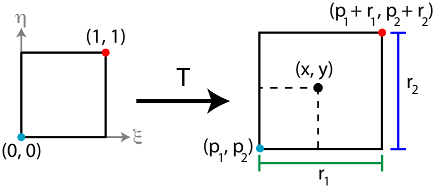
Segue que pela Regra da Cadeia:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{n} f_k \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_d} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} f_k \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \xi_d}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_d}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_d} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_d} & \cdots & \frac{\partial \xi_d}{\partial x_d} \end{bmatrix}}_{\text{inversa de } J_T^\top = \left[\frac{\partial T_j^{-1}}{\partial x_i}\right]} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial \xi_d} \end{bmatrix}$$

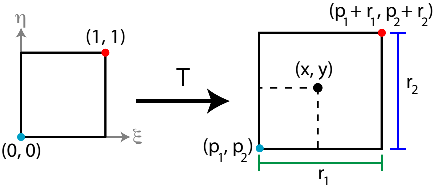
Exemplo: considere um grid uniforme no plano, onde cada célula tem tamanho (r_1, r_2) e funções base Φ_k^1.



$$(\xi, \eta) = T^{-1}(x, y) = \left(\frac{x - p_1}{r_1}, \frac{y - p_2}{r_2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{4} f_k \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_k^1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi_k^1}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Exemplo: considere um grid uniforme no plano, onde cada célula tem tamanho (r_1, r_2) e funções base Φ_k^1.

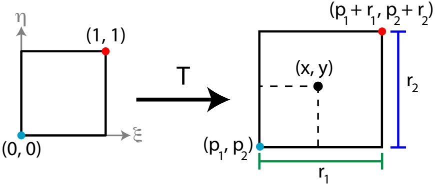


$$(\xi, \eta) = T^{-1}(x, y) = \left(\frac{x - p_1}{r_1}, \frac{y - p_2}{r_2} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{4} f_k \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_k^1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi_k^1}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Cálculo de Derivadas em Dados Discretos

Exemplo: considere um grid uniforme no plano, onde cada célula tem tamanho (r_1, r_2) e funções base Φ_k^1.

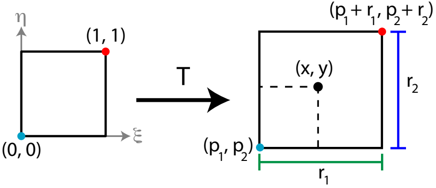


$$(\xi, \eta) = T^{-1}(x, y) = \left(\frac{x - p_1}{r_1}, \frac{y - p_2}{r_2} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{4} f_k \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_k^1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi_k^1}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1^1(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta) \quad \Phi_2^1(\xi, \eta) = \xi(1 - \eta) \quad \Phi_3^1(\xi, \eta) = \xi\eta \quad \Phi_4^1(\xi, \eta) = \eta(1 - \xi)$$

Exemplo: considere um grid uniforme no plano, onde cada célula tem tamanho (r_1, r_2) e funções base Φ_k^1.



$$(\xi, \eta) = T^{-1}(x, y) = \left(\frac{x - p_1}{r_1}, \frac{y - p_2}{r_2}\right)$$

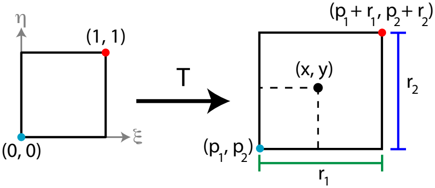
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{4} f_k \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_k^1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi_k^1}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1^1(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta) \quad \Phi_2^1(\xi, \eta) = \xi(1 - \eta) \quad \Phi_3^1(\xi, \eta) = \xi\eta \quad \Phi_4^1(\xi, \eta) = \eta(1 - \xi)$$

$$\partial_\xi \Phi_1^1 = \eta - 1 \qquad \partial_\xi \Phi_2^1 = 1 - \eta \qquad \partial_\xi \Phi_3^1 = \eta \qquad \partial_\xi \Phi_4^1 = -\eta$$

$$\partial_\eta \Phi_1^1 = \xi - 1 \qquad \partial_\eta \Phi_2^1 = -\xi \qquad \partial_\eta \Phi_3^1 = \xi \qquad \partial_\eta \Phi_4^1 = 1 - \xi$$

Exemplo: considere um grid uniforme no plano, onde cada célula tem tamanho (r_1, r_2) e funções base Φ_k^1.



$$(\xi, \eta) = T^{-1}(x, y) = \left(\frac{x - p_1}{r_1}, \frac{y - p_2}{r_2}\right)$$

$$\nabla F = \left((1-\eta)\frac{f_2 - f_1}{r_1} + \eta\frac{f_3 - f_4}{r_1}, (1-\xi)\frac{f_4 - f_1}{r_2} + \xi\frac{f_3 - f_2}{r_2}\right)$$

$$\Phi_1^1(\xi, \eta) = (1-\xi)(1-\eta) \quad \Phi_2^1(\xi, \eta) = \xi(1-\eta) \quad \Phi_3^1(\xi, \eta) = \xi\eta \quad \Phi_4^1(\xi, \eta) = \eta(1-\xi)$$

$$\partial_\xi \Phi_1^1 = \eta - 1 \qquad \partial_\xi \Phi_2^1 = 1 - \eta \qquad \partial_\xi \Phi_3^1 = \eta \qquad \partial_\xi \Phi_4^1 = -\eta$$

$$\partial_\eta \Phi_1^1 = \xi - 1 \qquad \partial_\eta \Phi_2^1 = -\xi \qquad \partial_\eta \Phi_3^1 = \xi \qquad \partial_\eta \Phi_4^1 = 1 - \xi$$

Aspectos Computacionais

Problema: se um ponto $\mathbf{p} = (x, y, z)$ pertence a uma célula C_i de uma malha $\mathcal{M}$, como localizar $C_i \subset \mathcal{M}$?

Aspectos Computacionais

Problema: se um ponto $\mathbf{p} = (x, y, z)$ pertence a uma célula C_i de uma malha $\mathcal{M}$, como localizar $C_i \subset \mathcal{M}$?

Solução:

- Grids Uniformes: $\left(\left\lfloor \frac{x}{r_1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{y}{r_2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{z}{r_3} \right\rfloor\right)$;

Aspectos Computacionais

Problema: se um ponto $\mathbf{p} = (x, y, z)$ pertence a uma célula C_i de uma malha $\mathcal{M}$, como localizar $C_i \subset \mathcal{M}$?

Solução:

- Grids Uniformes: $\left(\left\lfloor \frac{x}{r_1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{y}{r_2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{z}{r_3} \right\rfloor\right)$;
- Grids Retangulares: use o comando `find` em cada direção;
- Malhas Não-Estruturadas: encontre os vértices $\mathbf{p}_i \in \mathcal{M}$ mais próximos de $\mathbf{p}$ e depois encontre a célula com vértice $\mathbf{p}_i$ a que contém $\mathbf{p}$;

`[idx,dist] = knnsearch(X,Y,'k',k)`: encontra os k vizinhos mais próximos em X para cada ponto em Y;