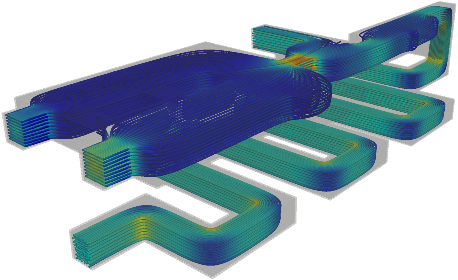


Visualização Científica – MAI5015

Representação de Dados

Afonso Paiva
ICMC-USP

13 de abril de 2020

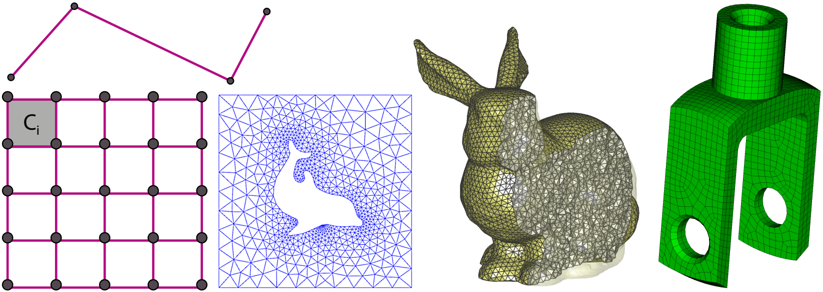
Malhas e Células

Definição

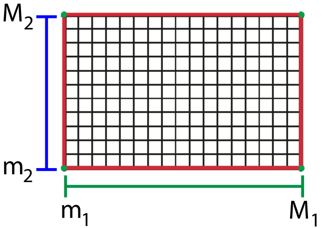
Uma malha é uma subdivisão de um dado domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ em uma coleção de células, denotadas por C_i, que satisfazem as seguintes propriedades:

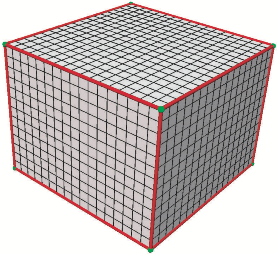
- $\mathrm{int}(C_i) \cap \mathrm{int}(C_j) = \emptyset, \forall i \neq j$
- $\bigcup_i C_i = \Omega$

Malhas Poligonais



Tipos de Malhas: Grids Uniformes





A caixa de dimensão d pode ser representada pelos pares:

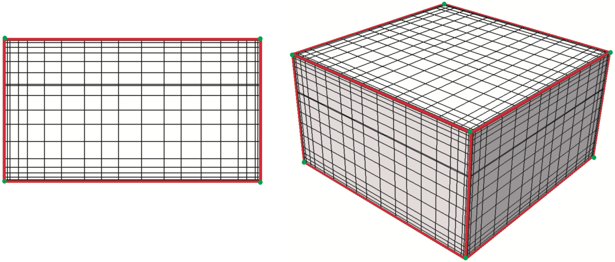
$$(m_1, M_1), \ldots, (m_d, M_d) \quad \text{com} \quad m_i < M_i$$

Assim, um ponto amostrado nos vértices do grid pode ser escrito como:

$$\mathbf{p}_i = (m_1 + n_1 r_1, \ldots, m_d + n_d r_d) \quad \text{com} \quad (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$$

Em que $r_1, \ldots, r_d$ é o espaçamento (deslocamento) em cada direção no grid e as coordenadas inteiras são chamadas de coordenadas estruturadas $\Rightarrow$ representação matricial!

Tipos de Malhas: Grids Não Uniformes



Um ponto amostrado nos vértices do grid não uniforme pode ser escrito como:

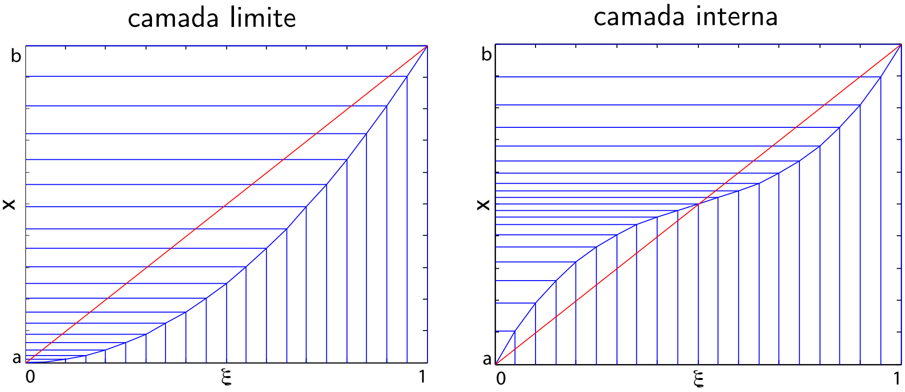
$$\mathbf{p}_i = (x_1, \ldots, x_d) \quad \text{com} \quad x_i = m_i + \sum_{j=1}^{n_i - 1} r_j^i \,,$$

em que r_j^i é um vetor com os deslocamentos em cada direção.

Vantagem: amostragem não uniforme de pontos $\Rightarrow$ stretching.

Stretching 1D

Stretching simples



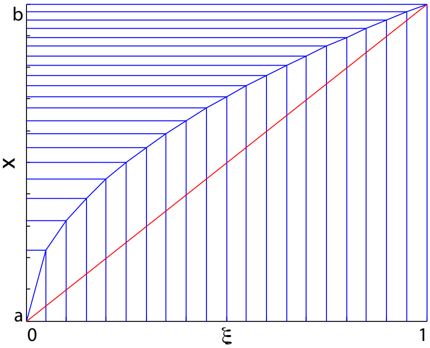
$$x = x(\xi)$$

Stretching simples: camada limite

Camada limite de "um lado": $x = \color{red}{L}(\xi^n)$ com $\xi \in [0, 1]$

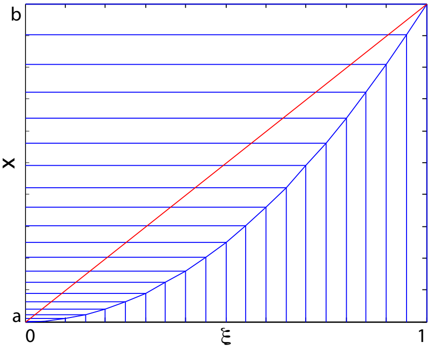
- L: reta que mapeia $[0, 1] \mapsto [a, b]$, isto é, $L(t) = (1 - t)a + tb$

$n < 1$



$x = 2\sqrt{\xi}$

$n > 1$



$x = 2\xi^2$

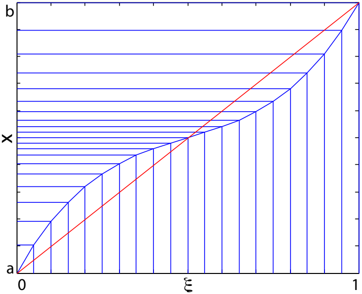
Stretching simples: camada interna

Função de Controle

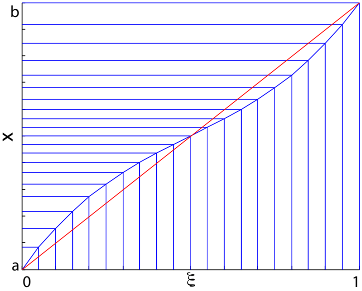
$$x = L(\xi) + A(x_c - L(\xi))(1-\xi)\xi \quad \text{com} \quad \xi \in [0,1] \tag{1}$$

- L: reta que mapeia $[0,1] \mapsto [a,b]$
- $x_c - L\xi$: mudança de sinal em x_c
- A: *força* de concentração de pontos
  - atração quando $A > 0$ e repulsão quando $A < 0$

$A = 2.5$



$A = 1.5$



Grid Cartesianos no MATLAB

`[X,Y,Z] = meshgrid(u,v)`: grid cartesiano em 2D/3D
`% u,v`: vetores de amostragem;
`% X,Y,Z`: coordenadas do grid;

Exercício 1

Gere o gráfico da gaussiana $g(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2))$ com $(x, y) \in [-3, 3]^2 = [-3, 3] \times [-3, 3]$, a partir de um grid uniforme de resolução 20×20. Para plotar use o comando `surf` do MATLAB.

Exercício 2

Refaça o exercício anterior usando stretching na origem $(0, 0)$.

Visualizando Grids no MATLAB

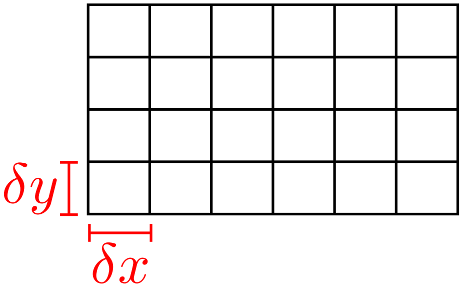
```
function plot_grid(X,Y)
% X, Y: grid com posicoes

[m,n] = size(X);

hold on
for i=1:m % linhas
    plot(X(i,:),Y(i,:),'k');
end

for j=1:n % colunas
    plot(X(:,j),Y(:,j),'k');
end
hold off
```

Exemplo Numérico

Exemplo

Considere a função $f(x, y) = x \exp(-(x^2 + y^2))$ com $(x, y) \in [-2, 2]^2$, discretizada em um grid uniforme de resolução 32×32.

- Como visualizar $f(x, y)$?
- Como visualizar o campo $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ no grid?

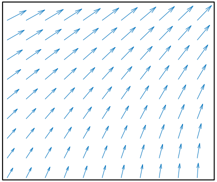


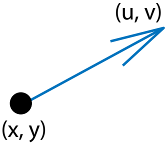
Exemplo Numérico

Visualização no MALTLAB

`pcolor(X,Y,C)`: desenha pseudo-cores;
`% X,Y`: coordenadas de uma malha estruturada;
`% C`: campo escalar;

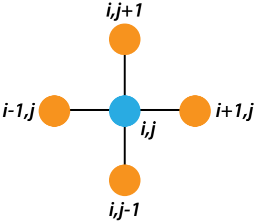
`quiver(x,y,u,v)`: desenha um campo velocidade
`% x,y,u,v`: velocidades com componentes (u, v) nos pontos (x, y);





Exemplo Numérico

Discretização com diferenças finitas



Precisamos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em um grid $m \times n$.

Vamos denotar $f_{i,j} = f(x_{i,j}, y_{i,j})$.

Diferenças finitas centradas

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\delta x} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\delta y},$$

com $i = 2, \ldots, n-1$ e $j = 2, \ldots, m-1$.

Diferenças finitas regressivas/progressivas (na fronteira)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{1,j} \approx \frac{f_{2,j} - f_{1,j}}{\delta x} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{n,j} \approx \frac{f_{n,j} - f_{n-1,j}}{\delta x}$$

Exemplo Numérico

Gradiente com diferenças finitas no MATLAB

`[Fx,Fy] = gradient(F,h)`: cálculo do gradiente de F;
`h`: espaçamento do grid;
`Fx,Fy`: derivadas parciais de F;