Cortes

Esta aula está fortemente baseada no Capítulo 8 de Wolsey.

Cortes

Objetivo dos cortes:

Aproximar o conjunto de soluções do PL

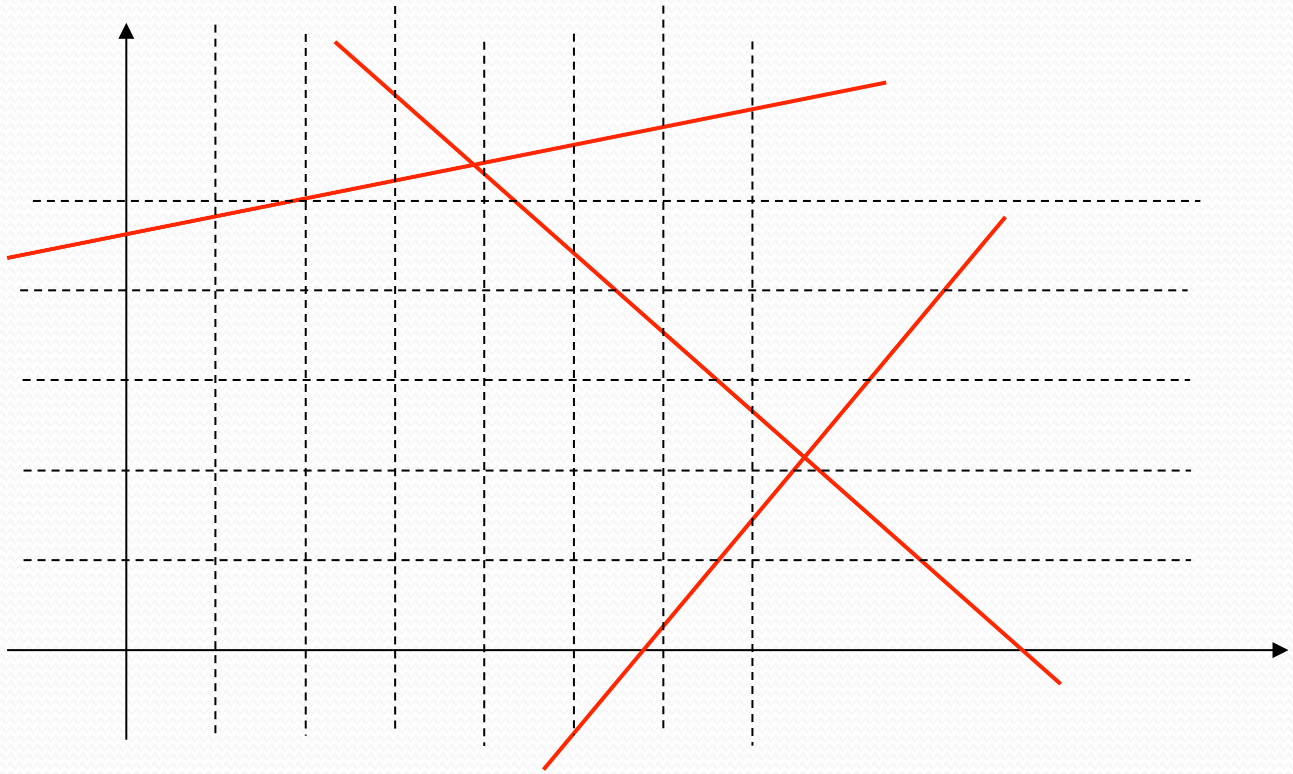
$$\underline{\mathbf{X}} = \{Ax \leq b \text{ e } x \geq 0\}$$

da envoltória convexa de PLI

$$conv(X) = \left\{ x : \tilde{A}x \leq \tilde{b}, x \geq 0 \right\}$$

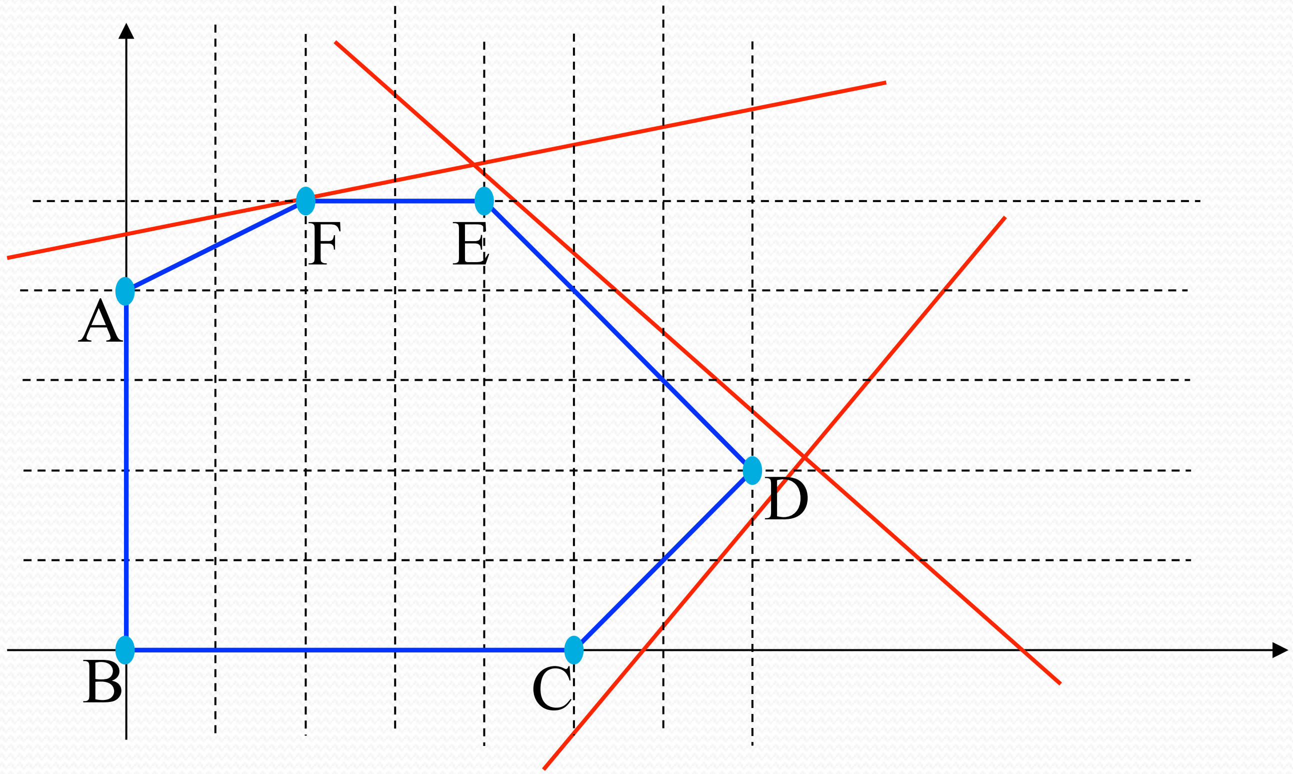
Cortes

Exemplo: Restrições (vermelho) de uma problema de otimização linear.



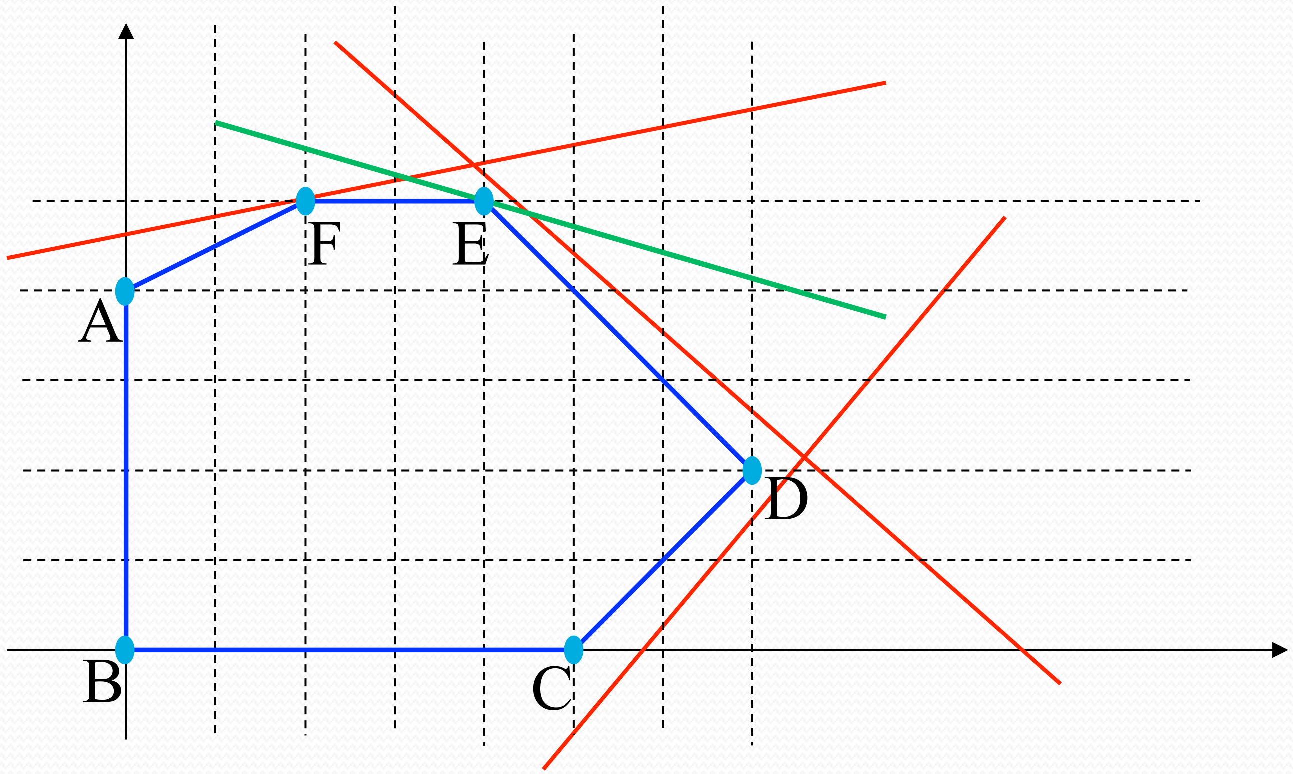
Cortes

Exemplo: Envoltória convexa do problema linear inteiro (vértices A,B,C,D ...F) (em azul).



Cortes

Exemplo: Exemplo de um corte válido (em verde).



Envoltória Convexa

- Para alguns problemas como: problema de designação, temos uma representação explícita da envoltória convexa.

- Em geral, o número de desigualdades que descrevem completamente o $conv(X)$ é exponencial.

Nosso objetivo

- Estudar caminhos eficientes para tentar se aproximar da $conv(X)$ para um dado problema.

- O conceito fundamental é o de

desigualdades válidas.

Observações:

- Cada corte representa uma restrição adicionada ao PL original.
- Um corte nunca deverá excluir um ponto de X e, portanto, nunca atravessa a envoltória convexa.
- Cada nova restrição reduz a região de factibilidade do PL original, aproximando-a da envoltória convexa.

Observações

- Para resolver o PLI "basta" resolver o PL restrito à envoltória convexa.

- Ao se relaxar as restrições de integralidade do PLI, o PL resultante fornece um valor de função objetivo que é um limitante superior para o PLI (problema de máximo).

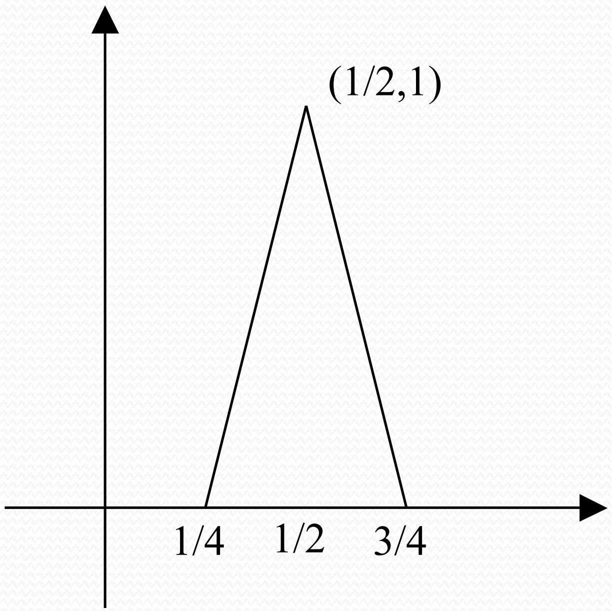
Observações

- Se o PL resultante do PLI relaxado for infactível então o PLI também é infactível.

- Mas se o PL resultante do PLI relaxado tem solução isso **não** implica que o PLI tem solução.

Exemplo: PL factível e PLI infactível

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ s.a \quad & -4x_1 + x_2 \leq -1 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$



Objetivo

Em resumo, nosso objetivo é adicionar restrições (cortes) a *X* e formar um conjunto *T*:

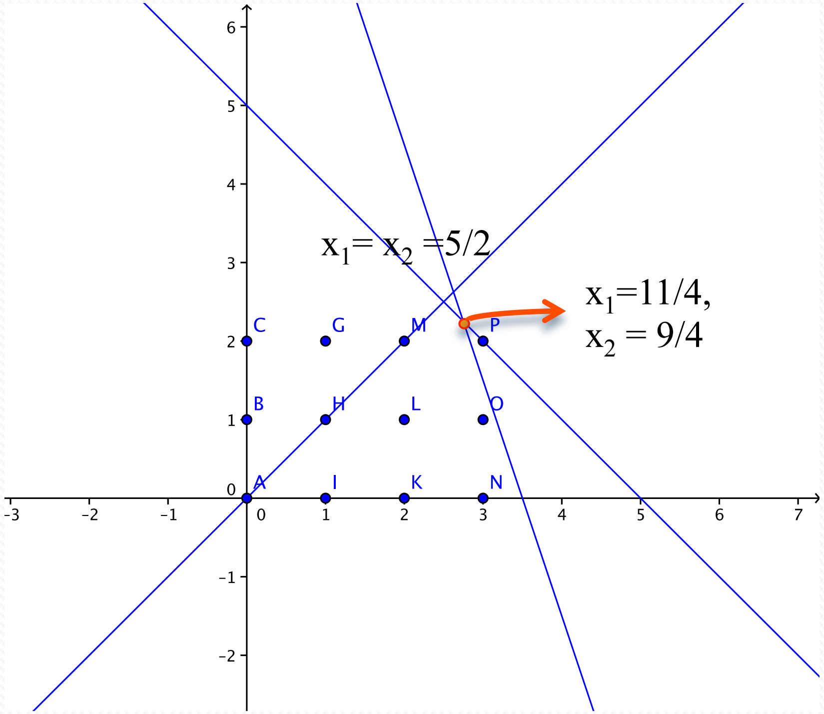
$$T = \{x \mid Ax \le b, \bar{A}x \le \bar{b}, x \ge 0\},$$

$$X \subset T (\bar{A}x \le \bar{b} \text{ é um corte})$$

Tal que *max cx* com $x \in T$, tem solução ótima inteira x^*, então x^* resolve PLI.

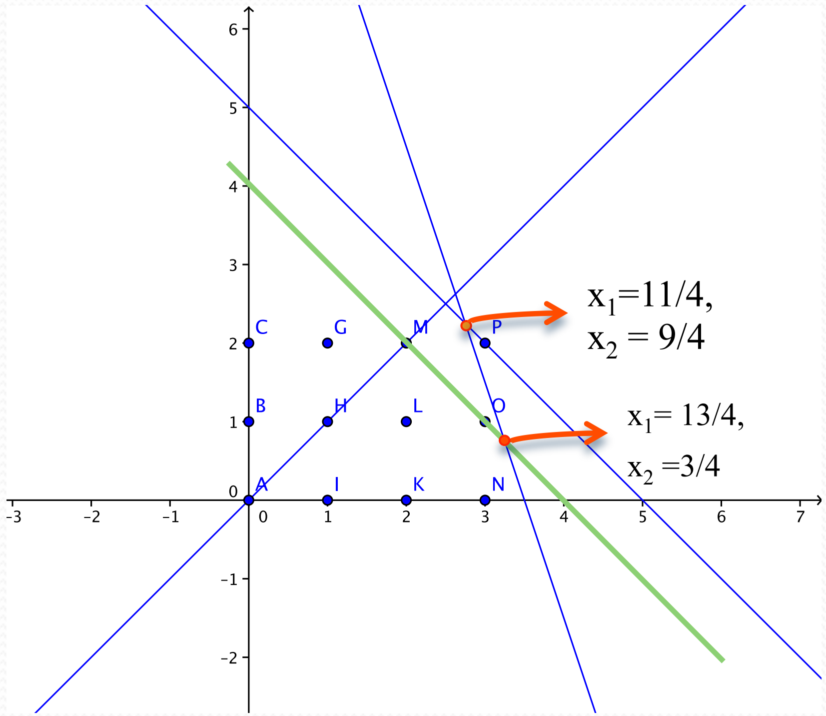
Exemplo

$$
\begin{array}{lll}
\max & 2x_1 + x_2 & \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 \le 5 & \text{(I)} \\
 & -x_1 + x_2 \le 0 & \text{(II)} \\
 & 6x_1 + 2x_2 \le 21 & \text{(III)} \\
 & x_1, x_2 \ge 0 \text{ e inteiros} &
\end{array}
$$



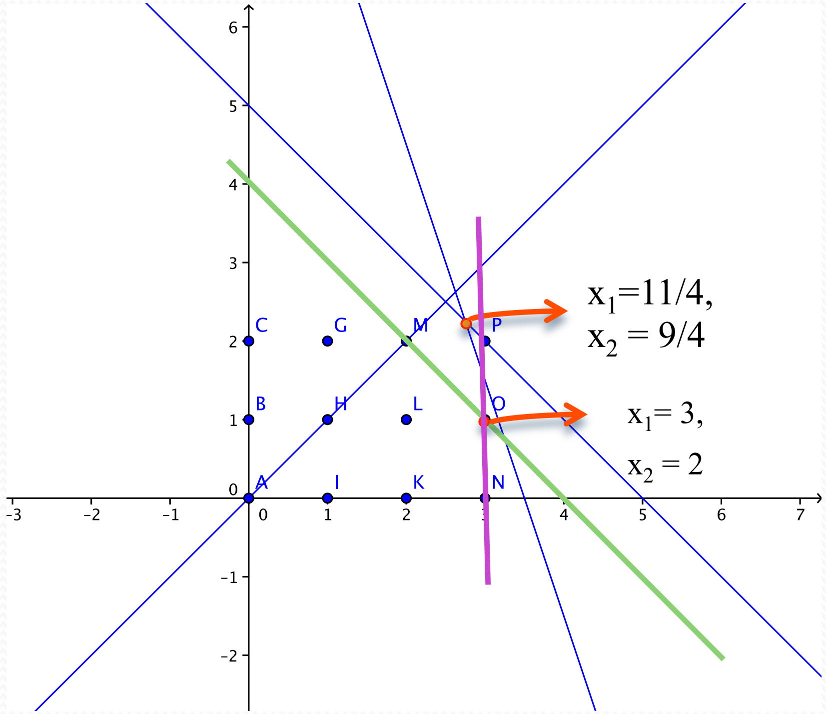
Exemplo

$$
\begin{array}{llr}
\max & 2x_1 + x_2 & \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 \le 5 & \text{(I)} \\
 & -x_1 + x_2 \le 0 & \text{(II)} \\
 & 6x_1 + 2x_2 \le 21 & \text{(III)} \\
 & \boxed{x_1 + x_2 \le 4 \quad (IV)} & \\
 & x_1, x_2 \ge 0 \text{ e inteiros} &
\end{array}
$$



Exemplo

$$
\begin{array}{lll}
\max & 2x_1 + x_2 & \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 5 & \text{(I)} \\
& -x_1 + x_2 \leq 0 & \text{(II)} \\
& 6x_1 + 2x_2 \leq 21 & \text{(III)} \\
& x_1 + x_2 \leq 4 & (IV) \\
& x_1 \leq 3 & (V) \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} &
\end{array}
$$



Desigualdade Válida

Definição. Uma desigualdade $\pi x \leq \pi_o$ é uma desigualdade válida para $X \subseteq R^n$ se $\pi x \leq \pi_o$ para todo $x \in X$.

Em palavras ...

"um desigualdade é válida se o conjunto *X* situa-se em um dos semi-espaços definidos pelo hiperplano

$\pi x = \pi_o$."

Arenales et al. (2007).

Desigualdade Válida - exemplo

Proposição 3.2. A desigualdade

$$x \leq \lfloor b \rfloor$$

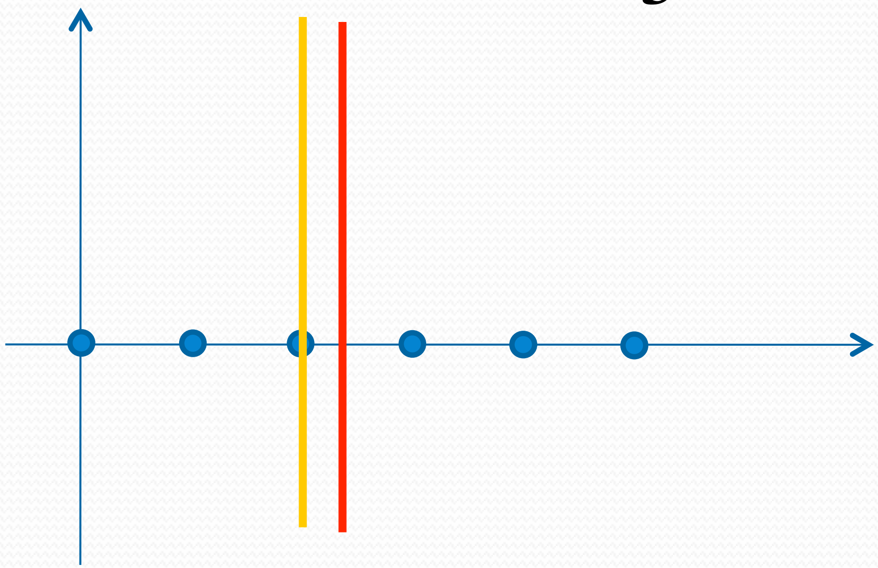
é válida para

$$X = \{x \in Z^1 : x \leq b\}$$

Desigualdade Válida - exemplo

Exemplo: $3x \leq 7$

Para o exemplo, o corte $x \leq \frac{7}{3} \Rightarrow x \leq \left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor \Rightarrow x \leq 2$



Desigualdade Válida

Duas questões importantes:

I) quais são as desigualdade "boas" e úteis?

II) Se conhecemos um conjunto de desigual-dades para um problema, como podemos usá-lo para tentar resolver uma instância em particular?

Desigualdades Válidas

Podem ser:

I) Inseridas a priori – pré-processamento

II) Ser inseridas ao longo do processo de busca da solução ótima – método de plano de cortes

Pré-processamento

Algumas desigualdades Válidas

Ex1. Considere o seguinte problema da mochila 0-1:

$$X = \left\{ x \in B^5 : 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \leq -2 \right\}$$

Se $x_2 = x_4 = 0$ temos que $3\,x_1 + 2\,x_3 + x_5 \geq 0$, mas deveríamos ter um valor ≤ -2, logo:

$$x_2 + x_4 \geq 1$$

é uma desigualdade **válida**.

Algumas desigualdades Válidas

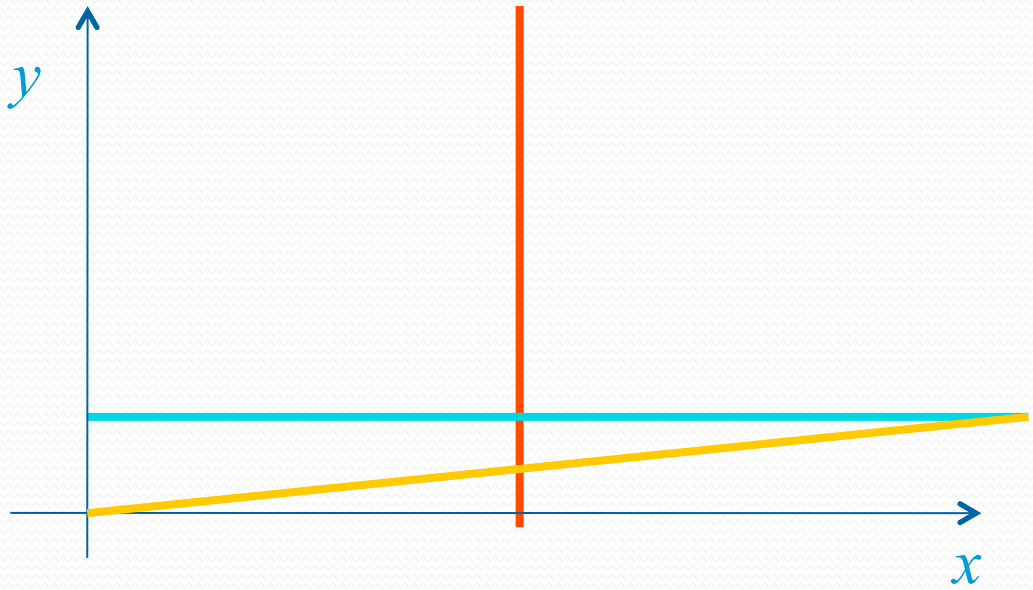
Ex2. Considere o seguinte problema inteiro misto:

$$X = \left\{ (x, y) : x \leq 10y,\ 0 \leq x \leq 5,\ y \in B^1 \right\}$$

É fácil ver que uma desigualdade **válida** para o problema é

$$\boldsymbol{x \leq 5y}$$

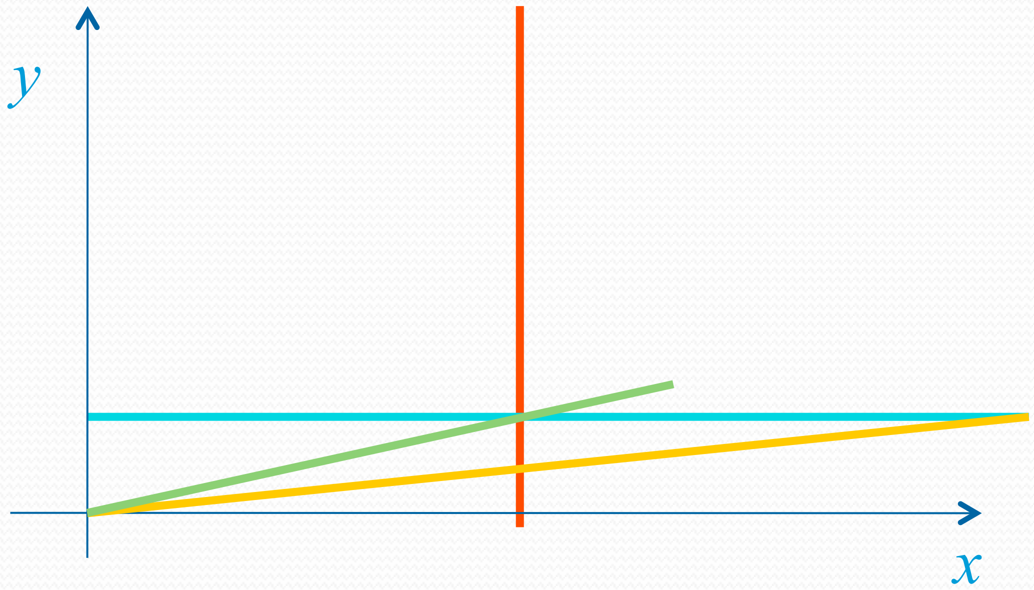
Algumas desigualdades Válidas



$x \leq 10y$

$0 \leq x \leq 5$ e $0 \leq y \leq 1$

Algumas desigualdades Válidas



$x \leq 10y$

$0 \leq x \leq 5$ e $0 \leq y \leq 1$

$x \leq 5y$

$0 \leq x \leq 5$ e $0 \leq y \leq 1$

Problema de Localização Capacitado

$$\sum_{i \in M} x_{ij} \leq b_j y_j$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = a_i$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad y_j \in \{0,1\}$$

Sabemos que para todas as soluções factíveis temos:

$$x_{ij} \leq b_j y_j \qquad x_{ij} \leq a_i$$

Logo, uma desigualdade válida é:

$$x_{ij} \leq \min\{a_i, b_j\} y_j$$

Ex4. Arredondamento de variáveis inteiras.

Considere a região inteira: $X = P \cap Z^4$, em que

$P = \{x \in R_+^4 : 13\,x_1 + 20\,x_2 + 11\,x_3 + 6x_4 \geq 72\}$

Dividindo a restrição por 11 temos:

$$\frac{13}{11}x_1 + \frac{20}{11}x_2 + x_3 + \frac{6}{11}x_4 \geq \frac{72}{11}$$

Ex4. Arredondamento de variáveis inteiras.

Sabemos que:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq \frac{13}{11}x_1 + \frac{20}{11}x_2 + x_3 + \frac{6}{11}x_4 \geq \frac{72}{11}$$

Como x_i é inteiro e todos os coeficiente de $2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$ também, podemos arredondar 72/11 para o menor inteiro maior que 72/11, ou seja,

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 7$$

Esta é uma desigualdade válida.

Inclusão de Desigualdades válidas *a priori*

Proposição 3.3. Considere o conjunto

$$S = \{x : a_0 x_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b, \quad l_j \le x_j \le u_j, \quad j = 1, \ldots, n\}.$$

i) *Limitantes em Variáveis.* Se $a_0 > 0$, então

$$x_0 \le (b - \sum_{j: a_j > 0} a_j l_j - \sum_{j: a_j < 0} a_j u_j) / a_0,$$

e se $a_0 < 0$, então

$$x_0 \ge (b - \sum_{j: a_j > 0} a_j l_j - \sum_{j: a_j < 0} a_j u_j) / a_0.$$

Fonte: Arenales et al., 2007

Inclusão de Desigualdades válidas *a priori*

Exemplo:

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq 9$$

$$0 \leq x_1 \leq 5 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x_1 \leq 4$$

$$1 \leq x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_3 \leq 2$$

$$1 \leq x_4 \leq 3$$

Inclusão de Desigualdades válidas *a priori*

ii) *Redundância.* A restrição $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$ é redundante se

$$\sum_{j:a_j>0} a_j u_j + \sum_{j:a_j<0} a_j l_j \leq b.$$

iii) *Infactibilidade.* $S = \varnothing$ se

$$\sum_{j:a_j>0} a_j l_j + \sum_{j:a_j<0} a_j u_j > b.$$

Fonte: Arenales et al., 2007

Inclusão de Desigualdades válidas *a priori*

iv) *Fixação de Variáveis*. Para um problema de maximização na forma

$$\max\{cx : Ax \leq b, l \leq x \leq u\},$$

se $a_{ij} > 0, i = 1,\ldots,m$ e $c_j < 0$, então $x_j = l_j$. Se $a_{ij} \leq 0, i = 1,\ldots,m$ e $c_j > 0$, então $x_j = u_j$.

Fonte: Arenales et al., 2007

Inclusão de Desigualdades válidas *a priori*

Exemplo 3.25 Considere o conjunto de restrições envolvendo quatro variáveis 0-1:

$$2x_1 + x_3 + x_4 \geq 2$$

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 4$$

$$-2x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 \leq 3$$

$$5x_2 - 3x_4 \geq 0$$

Fonte: Arenales et al., 2007

Inclusão de Desigualdades válidas *a priori*

Exemplo 3.25 Considere o conjunto de restrições envolvendo quatro variáveis 0-1:

$$2x_1 + x_3 + x_4 \geq 2$$

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 4$$

$$-2x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 \leq 3$$

$$5x_2 - 3x_4 \geq 0$$

Se na linha 1, $x_3 = 0$, então isto implica $x_1 = 1$, que conduz à desigualdade $x_1 + x_3 \geq 1$. De modo análogo, $x_1 + x_4 \geq 1$.

Se na linha 2, $x_3 = 1$, então isto implica $x_2 = 1$, que leva à desigualdade $x_3 \leq x_2$. Esta restrição é infactível se $x_3 = x_4 = 1$, que leva à desigualdade $x_3 + x_4 \leq 1$.

Fonte: Arenales et al., 2007

Inclusão de Desigualdades válidas *a priori*

Proposição 3.4 Considere o conjunto

$$X = \{x \in B^n : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b\}.$$

i) $X = \varnothing$ se $b < 0$ e $\sum_{j:a_j<0} a_j > b$.

ii) A restrição $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b$ é redundante se $\sum_{j:a_j>0} a_j \le b$;

iii) A restrição $x_i + x_j \le 1$ é válida se $a_i + a_j > b$.

iv) Seja $a_k > 0$. Se $\sum_{j:a_j<0} a_j + a_k > b$, então $x_k = 0$.

v) $x_k = 1$ implica em $x_j = 1$ se $a_k > b$ e $a_j < 0$.

Fonte: Arenales et al., 2007

Cortes:
Procedimento geral

Planos de Cortes

- Um dos primeiros métodos utilizados para resolver problemas de programação inteira.

OUTLINE OF AN ALGORITHM FOR INTEGER SOLUTIONS TO LINEAR PROGRAMS

BY RALPH E. GOMORY[1]

Communicated by A. W. Tucker, May 3, 1958

The problem of obtaining the best integer solution to a linear program comes up in several contexts. The connection with combinatorial problems is given by Dantzig in [1], the connection with problems involving economies of scale is given by Markowitz and Manne [3] in a paper which also contains an interesting example of the effect of discrete variables on a scheduling problem. Also Dreyfus [4] has discussed the role played by the requirement of discreteness of variables in limiting the range of problems amenable to linear programming techniques.

Planos de Cortes

Considere o seguinte problema de programação inteira:

$$
\begin{array}{lll}
(PLI) & \max & c^T x \\
 & s.a & Ax \leq b \\
 & & x \in Z_+^n
\end{array}
$$

- Vamos definir:

$$X = \left\{ x : Ax \leq b, x \in Z_+^n \right\}$$

Planos de Cortes

Esquema Básico do Método

1. Relaxar as restrições de integralidade de (PLI)
2. Resolver o PL correspondente
3. Se o PL é infactível ou se a solução ótima do PL for inteira → FIM. Senão vá ao Passo 4.
4. Adicione cortes (restrições) ao PL e volte para o Passo 2.

Desigualdade Válida – procedimento geral

Dado o conjunto: $X = \left\{ x : Ax \le b, x \in Z_+^n \right\}$

tal que A é uma matriz m x n com colunas

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

e seja

$$u \in R_+^m$$

Desigualdade Válida – procedimento geral

O procedimento geral (conhecido como procedimento de Chvátal-Gomory) é descrito por:

- A desigualdade $\sum_{j=1}^{n} u^T a_j x_j \le u^T b$

é válida para X, pois $u \ge 0 \quad e \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b$

- A desigualdade $\sum_{j=1}^{n} \lfloor u^T a_j \rfloor x_j \le u^T b$

é válida para X, pois $x \ge 0$

Desigualdade Válida – procedimento geral

O procedimento geral (conhecido como procedimento de Chvátal-Gomory) é descrito por:

- A desigualdade $\sum_{j=1}^{n} \lfloor u^T a_j \rfloor x_j \leq \lfloor u^T b \rfloor$

é válida para X, pois x é inteiro, portanto

$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor u^T a_j \rfloor x_j$$

é inteiro.

Desigualdade Válida – procedimento geral

Teorema. Toda desigualdade válida para X pode ser obtida aplicando-se o procedimento de Chvátal-Gomory um número finito de vezes.

Desigualdade Válida – procedimento geral

Exemplo 3.20 (Arenales et al., 2007) Identifique uma desigualdade para cortar o ponto (0,0,0,35/6) do conjunto

$$X = \left\{ x \in Z_{+}^{4} : 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 35 \right\}$$

Desigualdade Válida – procedimento geral

Exemplo. Escreva uma desigualdade válida para as restrições a seguir. Supondo que u' = (1/5; 1/2).

$$5x_1 + 2x_2 \leq 9$$

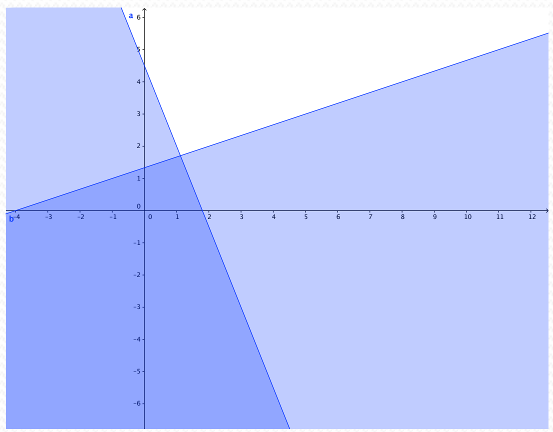
$$-x_1 + 3x_2 \leq 4$$

Desigualdade Válida – procedimento geral

Exemplo. Escreva uma desigualdade válida para as restrições a seguir. Supondo que u’ = (1/5; 1/2).

$$5x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 4$$



Desigualdade Válida – procedimento geral

Exemplo. Escreva uma desigualdade válida para as restrições a seguir. Supondo que u' = (1/5; 1/2).

$$5x_1 + 2x_2 \leq 9$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$0,5x_1 + 1,9x_2 \leq 2.8$$

Multiplicando por u

Desigualdade Válida – procedimento geral

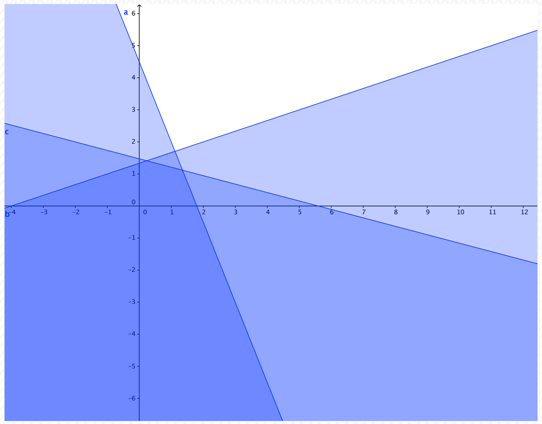
Exemplo. Escreva uma desigualdade válida para as restrições a seguir. Supondo que u' = (1/5; 1/2).

$$5x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$0,5x_1 + 1,9x_2 \leq 2.8$$

Multiplicando por u



Dedução do Corte Fundamental

Seja o PL resultante da relaxação de integralidade de PLI.

$$
\begin{aligned}
(PLI) \quad z_0 = Max \quad & c^T x \\
s.a \quad & Ax = b \\
& x \geq 0 \; e \text{ inteiro}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(PL) \quad z_0 = Max \quad & c^T x \\
s.a \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Dedução do Corte Fundamental

- Seja a solução ótima do PL dada por

$$z_o = c_B x_B + c_N x_N \quad (1)$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N x_N \quad (2)$$

ou ainda

$$x_{Bi} = y_{io} - \sum_{j \in Q} y_{ij} x_j \quad (3)$$

em que: $y_{io} = (B^{-1}b)_i$, $y_{ij} = (B^{-1}N)_{ij}$ e Q o conjunto das variáveis não básicas.

Dedução do Corte Fundamental

- Se a solução ótima de PL não é inteira, então existe x_{Bi} não inteiro.

- Multiplicando

$$x_{Bi} = y_{io} - \sum_{j \in Q} y_{ij} x_j \qquad (3)$$

por $u \geq 0$ temos:

$$u\, x_{Bi} + \sum_{j \in Q} u\, y_{ij} x_j = u\, y_{io} \qquad (4)$$

Dedução do Corte Fundamental

$$u\, x_{Bi} + \sum_{j \in Q} u\, y_{ij} x_j = u\, y_{io} \quad (4)$$

Seja $\lfloor h \rfloor$ o maior inteiro menor que h, como $x \geq 0$, temos que:

$$\lfloor u \rfloor\, x_{Bi} + \sum_{j \in Q} \lfloor u\, y_{ij} \rfloor\, x_j \leq u\, y_{io} \quad (5)$$

Dedução do Corte Fundamental

- Como x é inteiro temos que:

$$\lfloor u \rfloor x_{Bi} + \sum_{j \in Q} \lfloor u\, y_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor u\, y_{io} \rfloor \qquad (6)$$

- Multiplicando

$$x_{Bi} = y_{io} - \sum_{j \in Q} y_{ij} x_j \qquad (3)$$

por $\lfloor u \rfloor$ temos:

$$\lfloor u \rfloor x_{Bi} + \sum_{j \in Q} \lfloor u \rfloor y_{ij} x_j = \lfloor u \rfloor y_{io} \qquad (7)$$

Dedução do Corte Fundamental

- Fazendo (7) – (6) temos

$$\lfloor u \rfloor x_{Bi} + \sum_{j \in Q} \lfloor u\, y_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor u\, y_{io} \rfloor \qquad (6)$$

$$\lfloor u \rfloor x_{Bi} + \sum_{j \in Q} \lfloor u \rfloor y_{ij} x_j = \lfloor u \rfloor y_{io} \qquad (7)$$

$$\sum_{j \in Q} \lfloor u \rfloor y_{ij} x_j - \sum_{j \in Q} \lfloor u\, y_{ij} \rfloor x_j \geq \lfloor u \rfloor y_{io} - \lfloor u\, y_{io} \rfloor$$

Dedução do Corte Fundamental

$$\sum_{j \in Q} \left(\lfloor u \rfloor y_{ij} - \lfloor u y_{ij} \rfloor \right) x_j \geq \lfloor u \rfloor y_{i0} - \lfloor u y_{i0} \rfloor$$

Corte Fundamental.

Corte de Gomory

Escolhemos u = 1 no corte fundamental e temos:

$$\sum_{j \in Q}(y_{ij} - \lfloor y_{ij} \rfloor)\, x_j \geq y_{io} - \lfloor y_{io} \rfloor$$

Fazendo:

$$y_{ij} = \lfloor y_{ij} \rfloor + f_{ij} \qquad \text{com } 0 \leq f_{ij} \leq 1$$

Obtemos:

$$\sum_{j \in Q} f_{ij}\, x_j \geq f_{io} \qquad (9)$$

Corte de Gomory

$$\sum_{j \in Q} f_{ij}\, x_j \geq f_{io} \qquad (9)$$

Esta desigualdade corresponde ao corte de Gomory.

Como na solução básica ótima as variáveis $x_j = 0$, a desigualdade (9) corta a solução básica ótima.

Corte de Gomory

De (9) temos

$$\sum_{j \in Q} f_{ij}\, x_j - s_i = f_{io}$$

com $s_i \geq 0$.

Como $x_{Bi} = y_{io} - \sum_{j \in Q} y_{ij} x_j$

$$x_{Bi} = \lfloor y_{io} \rfloor + f_{io} - \sum_{j \in R} \lfloor y_{ij} \rfloor x_j - \sum_{j \in Q} f_{ij}\, x_j$$

$$x_{Bi} = \underbrace{f_{io} - \sum_{j \in Q} f_{ij}\, x_j + \lfloor y_{io} \rfloor}_{s_i} - \sum_{j \in Q} \lfloor y_{ij} \rfloor x_j$$

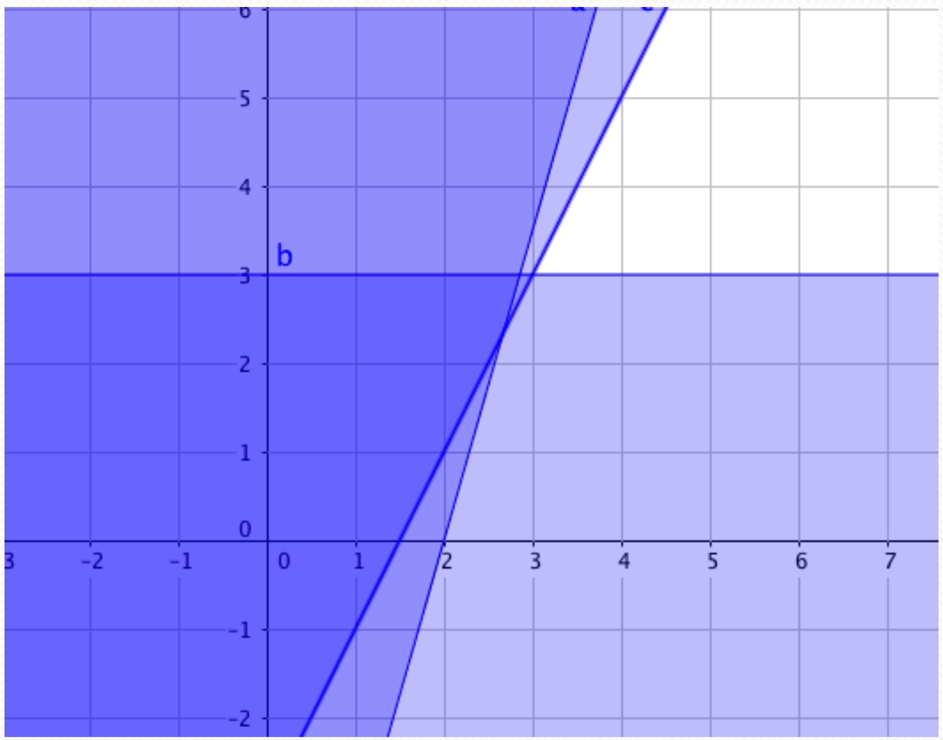
inteiro inteiro inteiro

inteira

Exemplo – Wolsey, 1998.

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z = & 4x_1 & -x_2 & & \\
s.a & & 7x_1 & -2x_2 & \leq & 14 \\
 & & & x_2 & \leq & 3 \\
 & & 2x_1 & -2x_2 & \leq & 3 \\
 & & x_1, & x_2 & \in & Z_+
\end{array}
$$

Exemplo – observando o gráfico*

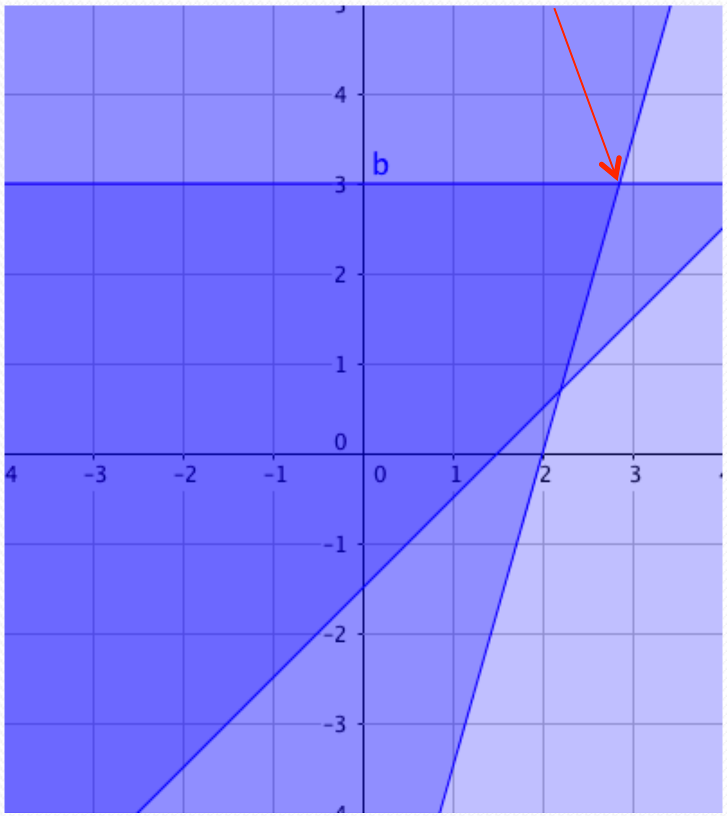


$$
\begin{array}{llrrl}
\max & z = & 4x_1 & - x_2 & \\
s.a & & 7x_1 & - 2x_2 & \le 14 \\
 & & & x_2 & \le 3 \\
 & & 2x_1 & - x_2 & \le 3 \\
 & & x_1, & x_2 & \ge 0
\end{array}
$$

*** Fonte pág. 127 – Wolsey, 1998.**

Exemplo – observando o gráfico*

x*



$$
\begin{array}{llllll}
\max & z = & 4x_1 & -x_2 & \\
s.a & & 7x_1 & -2x_2 & \leq 14 \\
& & & x_2 & \leq 3 \\
& & 2x_1 & -x_2 & \leq 3 \\
& & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

*** Fonte pág. 127 – Wolsey, 1998.**

Exemplo

Solução Ótima : problema relaxado

Não é inteira

Z	0	0	4/7	1/7	0	59/7
X_1	1	0	1/7	2/7	0	20/7
X_2	0	1	0	1	0	3
X_5	0	0	-2/7	10/7	1	23/7
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$B^{-1}b$

Vamos gerar um corte!

Exemplo

Se escolhermos X_1 para gerar o corte temos

$$\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 \geq \frac{20}{7} - \left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor$$

$$\boxed{\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 \geq \frac{6}{7}}$$

ou

$$\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 - s = \frac{6}{7}$$

Exemplo – observando o gráfico*

$$\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 \geq \frac{6}{7}$$

Escrevendo o corte em função de X1 e X2, temos:

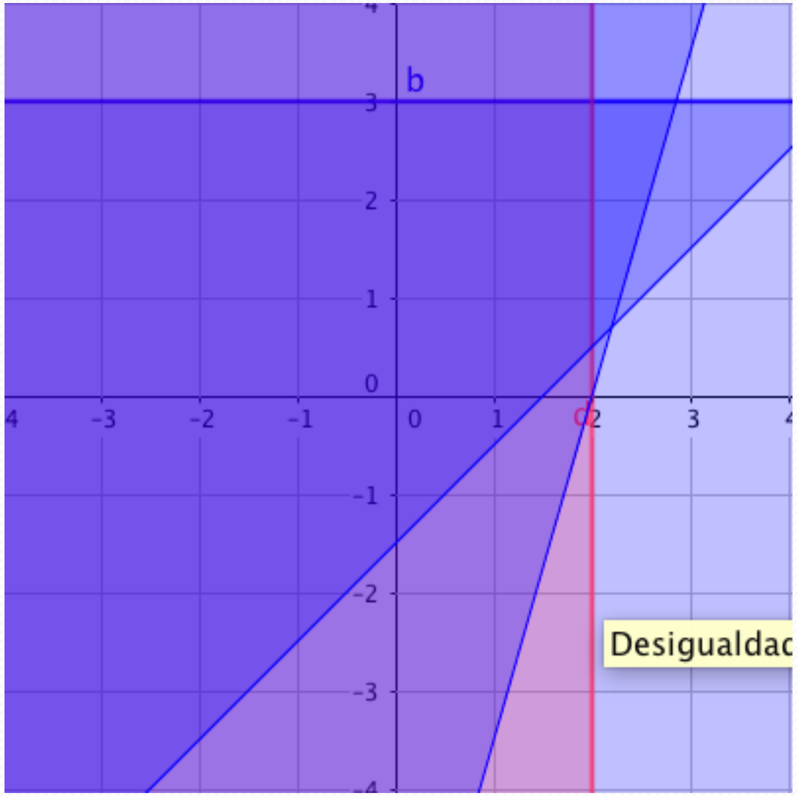
$$\frac{1}{7}(14 - 7x_1 + 2x_2) + \frac{2}{7}(3 - x_2) \geq \frac{6}{7}$$

$$ou$$

$$x_1 \leq 2$$

* Fonte pág. 126 – Wolsey, 1998.

Exemplo – observando o gráfico*



$$\begin{array}{lllll} \max & z = & 4x_1 & -x_2 & \\ s.a & & 7x_1 & -2x_2 & \leq 14 \\ & & & x_2 & \leq 3 \\ & & 2x_1 & -2x_2 & \leq 3 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

$$corte \quad x_1 \leq 2$$

*** Fonte pág. 127 – Wolsey, 1998.**

Exemplo – nova solução ótima

Z	0	0	0	0	1/2	3	15/2
X_1	1	0	0	0	0	1	2
X_2	0	1	0	0	-½	1	½
X_3	0	0	1	0	-1	-5	1
X_4	0	0	0	1	½	6	5/2
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S	$B^{-1}b$

Esta solução ainda não é inteira, logo devemos inserir um novo corte. (*Tarefa para casa ☺*)

Comentários

Escolha do corte: a partir da expressão:

$$\sum_{j \in R} f_{ij}\, x_j - s_i = f_{io}$$

temos que no espaço das variáveis x_j ($j \in R$), a interseção em cada eixo x_j ocorre no ponto:

$$(0,0,\ldots.,f_{io}/f_{ij},0,\ldots 0)$$

A grosso modo podemos dizer que quanto maior o valor de f_{io}/f_{ij}, mais profundo é o corte.

Comentários

Escolha do corte:

Regra clássica: escolher a linha de maior componente fracionária f_{ro}.

Outra Regra: escolher a 1a linha que apresenta componente fracionária.

Comentários

Eliminação de um corte do quadro simplex.

Se uma variável do tipo s_i re-entrar na base tanto s_i quanto o corte associado podem ser eliminados do quadro simplex.

Lógica se a variável de folga de uma restrição é positiva significa que esta restrição não está ativa.

Referência

- Livro:
  - Integer Programming – Laurence A. Wolsey, John Wiley & Sons, Inc. (1998).
  - Material didático professor Cid de Souza – IC – UNICAMP (www.dcc.unicamp.br/~cid)
  - Pesquisa Operacional – Arenales et al., Elsevier Editora Ltda. (2007).