

# Determinação de raízes de funções: Método do Ponto Fixo

Marina Andretta

ICMC-USP

07 de março de 2012

Baseado no livro *Análise Numérica*, de R. L. Burden e J. D. Faires.

# Determinação de raízes de funções

Vamos agora nos concentrar em resolver um dos problemas mais importantes de aproximação numérica: a determinação de raízes de funções.

Este problema consiste em encontrar uma raiz (ou uma solução) de uma equação da forma

$$f(x) = 0,$$

para uma dada função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

# Determinação de raízes de funções

O problema de determinação de raízes de funções data de, pelo menos, 1700 a.C.

Uma tábua babilônica, que data deste período, fornece um número em base 60 equivalente a 1.414222 como aproximação de  $\sqrt{2}$ , um resultado com precisão  $10^{-5}$ .

Estudaremos dois métodos para determinar raízes de funções: o **Método do Ponto Fixo** e o **Método de Newton**. Começaremos com o **Método do Ponto Fixo**.

Dizemos que um número  $p$  é um **ponto fixo** de uma função  $g$  se  $g(p) = p$ .

Os problemas de encontrar um ponto fixo de uma função e de encontrar uma de suas raízes são equivalentes, no seguinte sentido:

Dado um problema de determinação de raiz  $f(p) = 0$ , podemos definir funções  $g$  com um ponto fixo em  $p$  de diversas formas. Por exemplo,  $g(x) = x - f(x)$  ou  $g(x) = x + 3f(x)$ .

Reciprocamente, se a função  $g$  tiver um ponto fixo em  $p$ , a função definida por  $f(x) = x - g(x)$  terá um zero em  $p$ .

Primeiramente, vamos estudar o problema de encontrar um ponto fixo de uma função e determinar quando este ponto fixo existe e como determiná-lo com uma dada precisão.

**Exemplo:** A função  $g(x) = x^2 - 2$ , para  $-2 \leq x \leq 3$ , tem pontos fixos em  $x = -1$  e  $x = 2$ , já que  $g(-1) = 1 - 2 = -1$  e  $g(2) = 4 - 2 = 2$ .

O teorema a seguir estabelece condições suficientes para a existência e unicidade e um ponto fixo.

**Teorema 1:** Se  $g \in \mathcal{C}[a, b]$  e  $g(x) \in [a, b]$ , para todo  $x \in [a, b]$ ,  $g$  terá um ponto fixo em  $[a, b]$ .

Além disso, se  $g'(x)$  existir em  $(a, b)$  e existir uma constante positiva  $c < 1$  tal que  $|g'(x)| \leq c$ , para todo  $x \in (a, b)$ , então o ponto fixo em  $[a, b]$  será único.

**Exemplo:** Seja  $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$  em  $[-1, 1]$ .

O Teorema do Valor Extremo determina que o mínimo absoluto de  $g$  ocorre em  $x = 0$  e  $g(0) = -\frac{1}{3}$ . De modo análogo, o máximo absoluto de  $g$  ocorre em  $x = \pm 1$  e tem o valor  $g(\pm 1) = 0$ .

Além disso,  $g$  é contínua e

$$|g'(x)| = \left| \frac{2x}{3} \right| \leq \frac{2}{3},$$

para todo  $x \in (-1, 1)$ .



## Ponto fixo - exemplo

Portanto,  $g$  satisfaz as hipóteses do **Teorema 1** e, por isso, tem um único ponto fixo em  $[-1, 1]$ .

Neste exemplo, o único ponto fixo  $p$ , no intervalo  $[-1, 1]$ , pode ser determinado algebricamente:

$$p = g(p) = \frac{p^2 - 1}{3} \Rightarrow p^2 - 3p - 1 = 0.$$

Resolvendo a equação, temos  $p_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$  e  $p_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ . Como estamos interessados apenas no intervalo  $[-1, 1]$ , temos que o ponto fixo  $p$  é dado por  $p = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ .

## Ponto fixo - exemplo

Observe que  $g$  também possui um único ponto fixo  $p = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ , no intervalo  $[3, 4]$ .

No entanto,  $g(4) = 5$  e  $g'(4) = \frac{8}{3} > 1$ . Ou seja,  $g$  não satisfaz as hipóteses do **Teorema 1** em  $[3, 4]$ .

Portanto, as **hipóteses do Teorema 1 são condições suficientes, mas não necessárias**, para garantir a existência e unicidade de um ponto fixo de uma função em um dado intervalo.

# Método do Ponto Fixo

Para determinar a aproximação do ponto fixo de uma função  $g$ , escolhemos uma aproximação inicial  $p_0$  e geramos a sequência  $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ , definindo  $p_k = g(p_{k-1})$ , para  $k \geq 1$ .

Se a sequência convergir para  $p$  e  $g$  for contínua, temos que

$$p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \lim_{k \rightarrow \infty} g(p_{k-1}) = g(\lim_{k \rightarrow \infty} p_{k-1}) = g(p)$$

Ou seja, será encontrada uma solução para o problema  $g(x) = x$ .

**Método do Ponto Fixo:** dados uma aproximação inicial  $p_0$ , uma tolerância  $TOL > 0$  e o número máximo de iterações  $N_0$ , devolve a solução aproximada  $p$  ou uma mensagem de erro.

**Passo 1:** Faça  $k \leftarrow 1$ .

**Passo 2:** Enquanto  $k \leq N_0$ , execute os passos 3 a 6:

**Passo 3:** Faça  $p \leftarrow g(p_0)$ .

**Passo 4:** Se  $|p - p_0| < TOL$  ou  $\frac{|p - p_0|}{|p|} < TOL$  ou  $|f(p)| < TOL$ ,  
então devolva  $p$  como solução e pare.

**Passo 5:** Faça  $k \leftarrow k + 1$ .

**Passo 6:** Faça  $p_0 \leftarrow p$ .

**Passo 7:** Escreva “o método falhou após  $N_0$  iterações” e pare.

# Método do Ponto Fixo - exemplo

A equação  $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  tem uma única raiz em  $[1, 2]$ .

Existem várias maneiras pelas quais a equação pode ser manipulada para obter a forma de ponto fixo  $x = g(x)$ , como, por exemplo,

- $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10;$

- $x = g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x};$

- $x = g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3};$

- $x = g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}};$

- $x = g_5(x) = x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}.$

# Método do Ponto Fixo - exemplo

Com  $p_0 = 1.5$ , a tabela a seguir mostra os resultados da aplicação do **Método do Ponto Fixo** para as 5 opções de  $g$ . A raiz verdadeira é 1.365230013.

| $k$ | $g_1$              | $g_2$          | $g_3$       | $g_4$       | $g_5$       |
|-----|--------------------|----------------|-------------|-------------|-------------|
| 0   | 1.500              | 1.5000         | 1.500000000 | 1.500000000 | 1.500000000 |
| 1   | -0.875             | 0.8165         | 1.286953768 | 1.348399725 | 1.373333333 |
| 2   | 6.732              | 2.9969         | 1.402540804 | 1.367376372 | 1.365262015 |
| 3   | -469.700           | $\sqrt{-8.65}$ | 1.345458374 | 1.364957015 | 1.365230014 |
| 4   | $1.03 \times 10^8$ |                | 1.375170253 | 1.365264748 | 1.365230013 |
| 5   |                    |                | 1.360094193 | 1.365225594 |             |
| 6   |                    |                | 1.367846968 | 1.365230574 |             |
| 7   |                    |                | 1.363887004 | 1.365229942 |             |
| 8   |                    |                | 1.365916734 | 1.365230022 |             |
| 9   |                    |                | 1.364878217 | 1.365230012 |             |
| 10  |                    |                | 1.365410062 | 1.365230014 |             |
| 15  |                    |                | 1.365223680 | 1.365230013 |             |
| 20  |                    |                | 1.365230236 |             |             |
| 25  |                    |                | 1.365230006 |             |             |
| 30  |                    |                | 1.365230013 |             |             |

# Método do Ponto Fixo

Note que, apesar de todas estas funções terem sido construídas como problemas de ponto fixo para resolver um mesmo problema de determinação de raiz, a convergência é bem diferente.

Isso leva a uma questão muito importante: como escolher um problema de ponto fixo que gere um seqüência que convirja de modo rápido para a solução?

O teorema a seguir (e seu corolário) mostram caminhos a serem seguidos (ou evitados) para gerar uma função adequada.

**Teorema 2:** *Seja  $g \in \mathcal{C}[a, b]$  tal que  $g(x) \in [a, b]$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Suponha que  $g'(x)$  exista em  $(a, b)$  e que exista uma constante  $0 < c < 1$  com  $|g'(x)| \leq c$ , para todo  $x \in (a, b)$ .*

*Então, para qualquer número  $p_0 \in [a, b]$ , a sequência definida por  $p_k = g(p_{k-1})$ ,  $k \geq 1$ , converge para o único ponto fixo  $p$  em  $[a, b]$ .*



**Corolário 1:** Se  $g$  satisfizer as hipóteses do **Teorema 2**, então os limitantes para o erro envolvido na utilização de  $p_k$  para a aproximação de  $p$  são dados por

$$|p_k - p| \leq c^k \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$

e

$$|p_k - p| \leq \frac{c^k}{1-c} |p_0 - p|,$$

para todo  $k \geq 1$ .

As duas desigualdades do **Corolário 1** relacionam a taxa com a qual a sequência  $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$  converge, com o limitante  $c$  para a primeira derivada.

A taxa de convergência depende do valor  $c^k$ . Quanto menor for o valor de  $c$ , mais rápida será a convergência. Quanto mais próximo de 1, mais lenta.

Vamos analisar a taxa de convergência de cada uma das funções  $g_i$  do exemplo anterior de acordo com o **Teorema 2** e o **Corolário 1**.

- Para  $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$ , temos  $g_1(1) = 6$  e  $g_1(2) = -12$ , o que mostra que  $g_1$  não leva  $[1, 2]$  em  $[1, 2]$ .

Além disso,  $g_1'(x) = 1 - 3x^2 - 8x$ , ou seja,  $|g_1'(x)| > 1$  para todo  $x \in [1, 2]$ .

Apesar do **Teorema 2** não afirmar que o Método do Ponto Fixo vá falhar usando  $g_1$ , não há motivos para que a convergência seja esperada.

- Para  $g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$ , podemos notar que  $g_2(x)$  não leva  $[1, 2]$  em  $[1, 2]$  e a sequência  $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$  não é definida quando  $p_0 = 1.5$ .

Além disso, como  $p \approx 1.365$ , temos que  $g_2'(p) \approx 3.4$ . Ou seja, não existe intervalo  $I$  contendo  $p$  tal que  $|g_2'(x)| \leq 1$ , para  $x \in I$ .

Portanto, não há razão para esperar que o Método do Ponto Fixo convirja usando  $g_2$ .

# Método do Ponto Fixo - exemplo

- Para  $g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ , temos que  $g_3'(x) = -\frac{3x^2}{4\sqrt{10-x^3}} \leq 0$ , para todo  $x \in [1, 2]$ . Ou seja,  $g_3$  é estritamente decrescente neste intervalo. No entanto,  $|g_3'(2)| \approx 2.12$  e a condição  $|g_3'(x)| \leq c < 1$  falha em  $[1, 2]$ .

Fazendo uma análise mais detalhada, notamos que o intervalo  $[1, 1.5]$  poderia ser utilizado no lugar do intervalo  $[1, 2]$ . Neste novo intervalo, ainda é verdade que  $g_3$  é estritamente decrescente e, além disso,

$$1 < 1.28 \approx g_3(1.5) \leq g_3(x) \leq g_3(1) \approx 1.5,$$

para todo  $x \in [1, 1.5]$ . Isso mostra que  $g_3$  leva  $[1, 1.5]$  em  $[1, 1.5]$ .

Como  $|g_3'(x)| \leq |g_3'(1.5)| \approx 0.66$  neste intervalo, o **Teorema 2** confirma a convergência que sabíamos existir.

- Para  $g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}}$ , temos que

$$|g_4'(x)| = \left| \frac{-5}{\sqrt{10}(4+x)^{3/2}} \right| \leq \frac{5}{\sqrt{10}(5)^{3/2}} < 0.15,$$

para todo  $x \in [1, 2]$ .

Como o limitante para o módulo de  $g_4'(x)$  é muito menor do que o limitante encontrado para o módulo de  $g_3'(x)$ , a convergência é muito mais rápida quando usamos  $g_4$  no Método do Ponto Fixo.

- A sequência definida por  $g_5(x) = x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$  converge mais rápido do que todas as outras opções.

Mais adiante veremos porque isso acontece.