

# Interpolação polinomial: Polinômio de Lagrange

Marina Andretta

ICMC-USP

09 de maio de 2012

Baseado no livro *Análise Numérica*, de R. L. Burden e J. D. Faires.

# Aproximação de funções por polinômios

Considere, por exemplo, que temos uma tabela com anos e o número de habitantes de um país em cada um destes anos.

Podemos estar interessados em estimar qual será a população em um ano futuro, usando como base os dados da tabela.

Este processo é chamado de **interpolação**.

# Aproximação de funções por polinômios

O que fazemos é aproximar uma função desconhecida (no caso do exemplo, a quantidade de habitantes em função do ano) por outra.

Uma classe de funções muito usada para aproximar outras funções desconhecidas é a de polinômios.

Primeiramente, é garantido que sempre é possível aproximar uma função contínua por um polinômio. Além disso, polinômios têm derivadas e integrais muito fáceis de serem calculadas.

A aproximação de funções por polinômios é chamada de **interpolação polinomial**.

Veremos agora como definir polinômios interpoladores a partir de pontos no plano onde estes polinômios devem passar.

O problema de encontrar um polinômio de grau um que passa pelos pontos distintos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  é o mesmo de aproximar uma função  $f$ , para a qual  $f(x_0) = y_0$  e  $f(x_1) = y_1$ , por um polinômio interpolador de grau um.

Primeiramente, vamos definir as funções

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Depois, definimos o polinômio

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1).$$

Como

$$L_0(x_0) = 1, \quad L_0(x_1) = 0, \quad L_1(x_0) = 0, \quad L_1(x_1) = 1,$$

temos que

$$P(x_0) = 1f(x_0) + 0f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

e

$$P(x_1) = 0f(x_0) + 1f(x_1) = f(x_1) = y_1,$$

como gostaríamos.

$P$  é a única reta que passa pelos pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ .

Para generalizar a idéia de interpolação linear (ou seja, aproximação de funções por uma reta), considere a construção de um polinômio de grau no máximo  $n$  que passe pelos  $n + 1$  pontos

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n)).$$

# Interpolação polinomial

Neste caso, precisamos construir uma função  $L_{n,k}(x)$ , para cada  $k = 0, 1, \dots, n$ , para a qual vale que  $L_{n,k}(x_k) = 1$  e  $L_{n,k}(x_i) = 0$ , se  $i \neq k$ .

Para que valha que  $L_{n,k}(x_i) = 0$ , se  $i \neq k$ , utilizamos o termo

$$(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)$$

no numerador de  $L_{n,k}(x_i)$ .



Para que valha que  $L_{n,k}(x_k) = 1$ , precisamos que o numerador e o denominador de  $L_{n,k}(x)$  sejam iguais quando  $x = x_k$ . Ou seja,

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)}.$$

Uma vez conhecidas as funções  $L_{n,k}$ , um polinômio interpolador é facilmente determinado.

Este polinômio é chamado de  **$n$ -ésimo polinômio interpolador de Lagrange** e é definido como descrito no Teorema 1.

# Interpolação polinomial de Lagrange

**Teorema 1:** Se  $x_0, x_1, \dots, x_n$  são  $n + 1$  números distintos e  $f$  é uma função cujos valores nestes números são dados, então existe um único polinômio  $P(x)$  de grau no máximo  $n$  com

$$f(x_k) = P(x_k), \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n.$$

Este polinômio é dado por

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \dots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_{n,k}(x), \quad (1)$$

onde, para cada  $k = 0, 1, \dots, n$ ,

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)} = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}.$$

# Interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Quando não houver dúvida quanto ao grau do polinômio, denotaremos  $L_{n,k}(x)$  por  $L_k(x)$ .

Queremos determinar o segundo polinômio interpolador de Lagrange para a função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , usando os pontos  $x_0 = 2$ ,  $x_1 = 2.5$  e  $x_2 = 4$ .

Para isto, o primeiro passo é determinar  $L_0(x)$ ,  $L_1(x)$  e  $L_2(x)$ .

# Interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Usando a definição vista anteriormente, temos que

$$L_0(x) = \frac{(x - 2.5)(x - 4)}{(2 - 2.5)(2 - 4)} = (x - 2.5)(x - 4),$$

$$L_1(x) = \frac{(x - 2)(x - 4)}{(2.5 - 2)(2.5 - 4)} = -\frac{(x - 2)(x - 4)}{0.75},$$

e

$$L_2(x) = \frac{(x - 2)(x - 2.5)}{(4 - 2)(4 - 2.5)} = \frac{(x - 2)(x - 2.5)}{3}.$$

# Interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Como

$$f(x_0) = f(2) = 0.5, \quad f(x_1) = f(2.5) = 0.4, \quad f(x_2) = f(4) = 0.25,$$

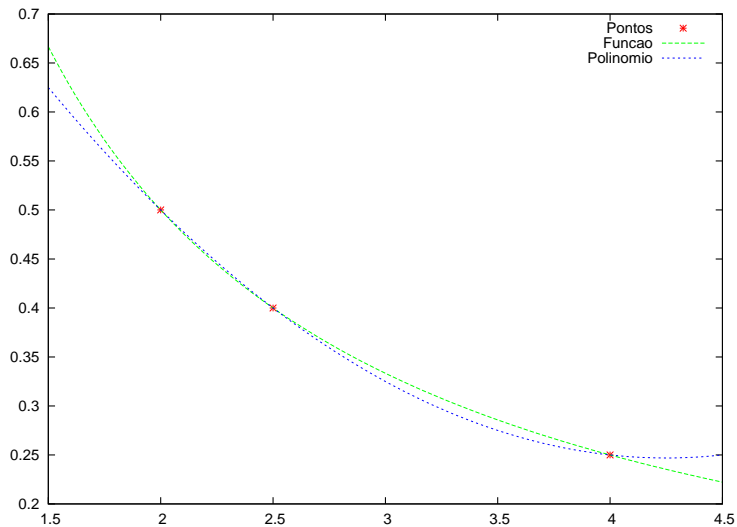
temos que

$$P(x) = \sum_{k=0}^2 f(x_k)L_k(x) =$$

$$0.5(x - 2.5)(x - 4) - 0.4 \frac{(x - 2)(x - 4)}{0.75} + 0.25 \frac{(x - 2)(x - 2.5)}{3} =$$

$$0.05x^2 - 0.425x + 1.15.$$

# Interpolação polinomial de Lagrange - exemplo



# Interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Usando o polinômio  $P$  calculado, podemos estimar o valor da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  em um ponto.

Uma aproximação de  $f(3) = \frac{1}{3}$  é

$$f(3) \approx P(3) = 0.325.$$

Precisamos agora de uma estimativa para o erro cometido na aproximação de uma função  $f$  por um polinômio interpolador  $P$ .



**Teorema 2:** *Suponha que  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sejam números distintos no intervalo  $[a, b]$  e que  $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$ . Então, para cada  $x \in [a, b]$ , existe um número  $\xi(x)$  (geralmente conhecido) em  $(a, b)$  tal que*

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n),$$

onde  $P(x)$  é o polinômio interpolador (1).

# Erro da interpolação polinomial de Lagrange

Observe que a forma do erro para o polinômio de Lagrange é parecida com a fórmula do erro para o polinômio de Taylor.

O  $n$ -ésimo polinômio de Taylor em torno de  $x_0$  concentra todas as informações conhecidas em  $x_0$  e possui um termo de erro da forma

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

# Erro da interpolação polinomial de Lagrange

O  $n$ -ésimo polinômio de Lagrange utiliza informações dos números distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Assim, no lugar do termo  $(x - x_0)^{n+1}$ , sua fórmula para o erro utiliza o produto dos  $n + 1$  termos  $(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$ , ou seja,

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

## Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Suponha que montemos uma tabela com valores da função  $f(x) = e^x$ , para  $x \in [0, 1]$ .

Suponha que o número de casas decimais usadas para cada valor de  $x$  seja  $d \geq 8$  e que os valores de  $x$  estejam espaçados igualmente, com distância  $h$  (ou seja,  $x_i = x_{i-1} + h$ ).

Qual deve ser o valor de  $h$  para que a interpolação linear (ou seja, primeiro polinômio interpolador de Lagrange) gere um erro absoluto de até  $10^{-6}$ ?

# Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Considere  $x_0, x_1, \dots$  os números nos quais  $f$  será calculada.

Tome  $x \in [0, 1]$  e  $j$  tal que  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ .

A equação do erro na interpolação linear é dada por

$$|f(x) - P(x)| = \left| \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!} (x - x_j)(x - x_{j+1}) \right| = \frac{|f^{(2)}(\xi)|}{2} |(x - x_j)| |(x - x_{j+1})|.$$

## Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Como a distância entre dois pontos consecutivos  $x_j$  e  $x_{j+1}$  é  $h$ , temos que  $x_j = jh$  e  $x_{j+1} = (j+1)h$ . Assim,

$$|f(x) - P(x)| = \frac{|f^{(2)}(\xi)|}{2} |(x - jh)(x - (j+1)h)|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |f(x) - P(x)| &\leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in [0,1]} e^{\xi} \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j+1)h)| \leq \\ &\frac{1}{2} e \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j+1)h)|. \end{aligned}$$

## Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Considerando  $g(x) = (x - jh)(x - (j + 1)h)$ , para  $jh \leq x \leq (j + 1)h$ , podemos utilizar o Teorema do Valor Extremo para obter

$$\max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |(x - jh)(x - (j + 1)h)| = \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} |g(x)| = \left| g \left( \left( j + \frac{1}{2} \right) h \right) \right| = \frac{h^2}{4}.$$

Assim, o erro da interpolação linear será limitado por

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{eh^2}{8}.$$

# Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Ou seja,  $h$  deve ser escolhido de forma que

$$\frac{eh^2}{8} \leq 10^{-6},$$

o que implica que

$$h < 1.72 \times 10^{-3}.$$

Como  $h$  é escolhido de forma que os pontos  $x_i \in [0, 1]$  sejam igualmente espaçados, temos que  $n = (1 - 0)/h$  deve ser um número inteiro. Uma escolha para o tamanho de passo seria  $h = 0.001$ .



# Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Vejamos, agora, um exemplo em que a função a ser aproximada é desconhecida.

A tabela a seguir fornece os valores de uma função em vários pontos.

$x$	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

# Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

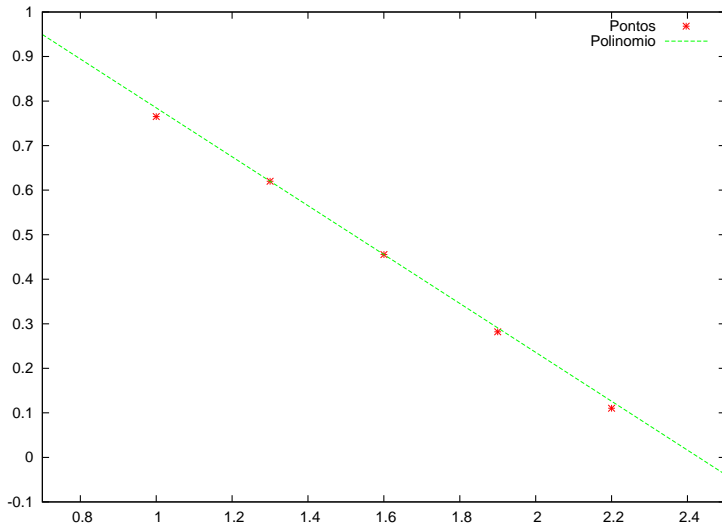
Vamos comparar as aproximações de  $f(1.5)$  obtida através de vários polinômios interpoladores de Lagrange.

Como 1.5 está entre 1.3 e 1.6, o polinômio interpolador de grau um mais adequado é o que utiliza os pontos  $x_0 = 1.3$  e  $x_1 = 1.6$ .

O valor deste polinômio interpolador de grau um, calculado em 1.5, é dado por

$$P_1(1.5) = \frac{(1.5 - 1.6)}{(1.3 - 1.6)}f(1.3) + \frac{(1.5 - 1.3)}{(1.6 - 1.3)}f(1.6) =$$
$$\frac{(1.5 - 1.6)}{(1.3 - 1.6)}0.6200860 + \frac{(1.5 - 1.3)}{(1.6 - 1.3)}0.4554022 = 0.5102968.$$

# Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo



## Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Para calcular um polinômio interpolador de grau dois e usá-lo para aproximar o valor de  $f(1.5)$ , temos duas boas opções.

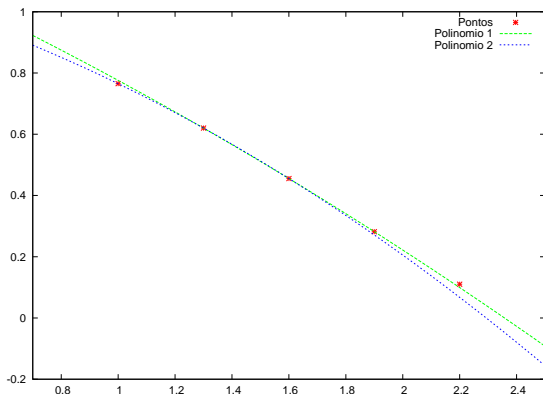
Uma é utilizar os pontos  $x_0 = 1.3$ ,  $x_1 = 1.6$  e  $x_2 = 1.9$ , obtendo

$$P_2(1.5) = \frac{(1.5 - 1.6)(1.5 - 1.9)}{(1.3 - 1.6)(1.3 - 1.9)}f(1.3) + \frac{(1.5 - 1.3)(1.5 - 1.9)}{(1.6 - 1.3)(1.6 - 1.9)}f(1.6) + \frac{(1.5 - 1.3)(1.5 - 1.6)}{(1.9 - 1.3)(1.9 - 1.6)}f(1.9) =$$

$$\frac{(1.5 - 1.6)(1.5 - 1.9)}{(1.3 - 1.6)(1.3 - 1.9)}0.6200860 + \frac{(1.5 - 1.3)(1.5 - 1.9)}{(1.6 - 1.3)(1.6 - 1.9)}0.4554022 + \frac{(1.5 - 1.3)(1.5 - 1.6)}{(1.9 - 1.3)(1.9 - 1.6)}0.2818186 = 0.5112857.$$

# Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

A outra é utilizar os pontos  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 1.3$  e  $x_2 = 1.6$ , obtendo  $\hat{P}_2(1.5) = 0.5124715$ .



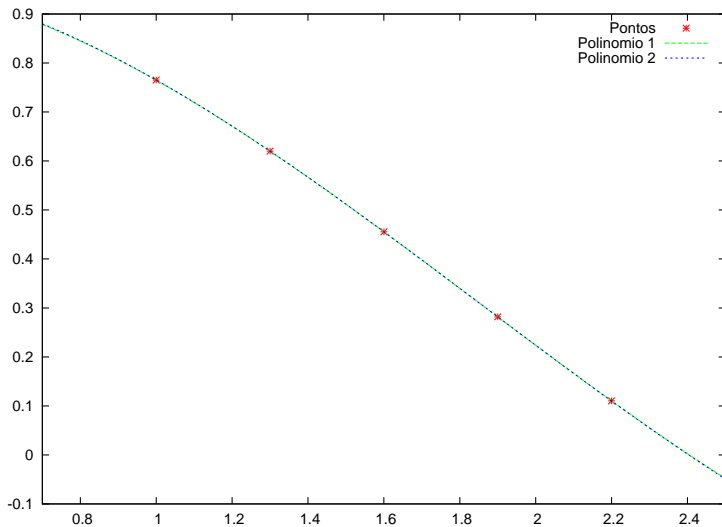
# Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Para calcular um polinômio interpolador de grau três e usá-lo para aproximar o valor de  $f(1.5)$ , temos, também, duas boas opções.

Uma é utilizar os pontos  $x_0 = 1.3$ ,  $x_1 = 1.6$ ,  $x_2 = 1.9$  e  $x_3 = 2.2$ , obtendo  $P_3(1.5) = 0.5118302$ .

A outra é utilizar os pontos  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 1.3$ ,  $x_2 = 1.6$  e  $x_3 = 1.9$ , obtendo  $\hat{P}_3(1.5) = 0.5118127$ .

# Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo



## Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

O polinômio interpolador de Lagrange de grau quatro utiliza todos os pontos da tabela e obtém a aproximação  $P_4(1.5) = 0.51182$ .

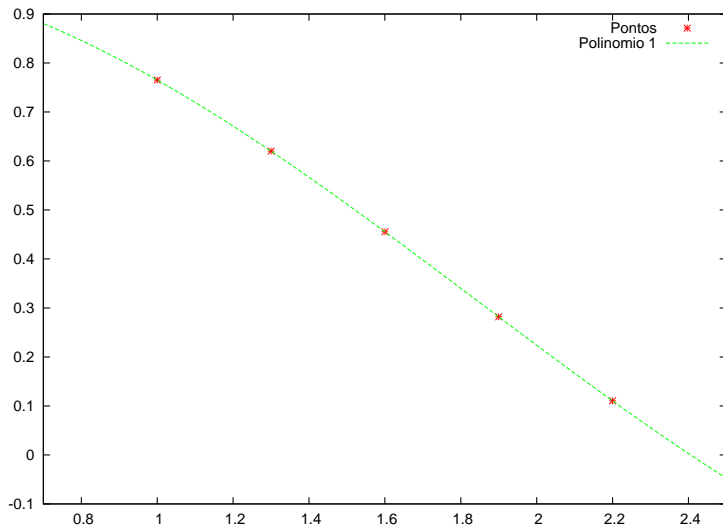
Como  $P_3(1.5)$ ,  $\hat{P}_3(1.5)$  e  $P_4(1.5)$  coincidem com uma precisão de  $2 \times 10^{-5}$ , espera-se essa ordem de precisão para todas as aproximações.

Espera-se também que  $P_4(1.5)$  seja a aproximação mais precisa, pois utiliza mais dados fornecidos.

A função que está sendo aproximada é a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero, cujo valor em 1.5 é 0.5118277.



# Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo



# Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Portanto, as precisões verdadeiras obtidas são:

$$|P_1(1.5) - f(1.5)| \approx 1.53 \times 10^{-3}$$

$$|P_2(1.5) - f(1.5)| \approx 5.42 \times 10^{-4}$$

$$|\hat{P}_2(1.5) - f(1.5)| \approx 6.44 \times 10^{-4}$$

$$|P_3(1.5) - f(1.5)| \approx 2.5 \times 10^{-6}$$

$$|\hat{P}_3(1.5) - f(1.5)| \approx 1.5 \times 10^{-5}$$

$$|P_4(1.5) - f(1.5)| \approx 7.7 \times 10^{-6}$$

# Erro da interpolação polinomial de Lagrange - exemplo

Apesar de  $P_3(1.5)$  apresentar o menor erro de aproximação, sem conhecer o verdadeiro valor de  $f(1.5)$ , acreditaríamos que a melhor aproximação é dada por  $P_4(1.5)$ .

Neste caso, o termo de erro do polinômio interpolação de Lagrange não é conhecido, já que não dispomos nem da função  $f$ , nem de suas derivadas.

Em geral, quando calculamos o polinômio interpolador, de fato, não conhecemos a função verdadeira ou suas derivadas.

# Interpolação polinomial de Lagrange

Esta é uma dificuldade prática com a interpolação polinomial de Lagrange: como o termo de erro é difícil de ser calculado, não é possível garantir uma precisão desejada para as aproximações obtidas.

A prática mais comum é calcular as aproximações fornecidas para diversos polinômios e, então, escolher a mais adequada (como feito no exemplo anterior).

O problema com esta abordagem é que, ao se calcular uma nova aproximação, usando um novo polinômio, nenhum cálculo é aproveitado. Vejamos como isto pode ser contornado.

**Definição:** Seja  $f$  uma função definida em  $x_0, x_1, \dots, x_n$  e suponha que  $m_1, m_2, \dots, m_k$  sejam  $k$  números inteiros distintos, com  $0 \leq m_i \leq n$  para todo  $i$ . O polinômio de Lagrange que coincide com  $f(x)$  nos  $k$  pontos  $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_k}$  é denotado por  $P_{m_1, m_2, \dots, m_k}(x)$ .

Por exemplo, se  $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 6$  e  $f(x) = e^x$ , o polinômio  $P_{1,2,4}(x)$  é aquele que coincide com  $x_1, x_2$  e  $x_4$ . Ou seja,

$$P_{1,2,4}(x) = \frac{(x-3)(x-6)}{(2-3)(2-6)}e^2 + \frac{(x-2)(x-6)}{(3-2)(3-6)}e^3 + \frac{(x-2)(x-3)}{(6-2)(6-3)}e^6.$$

**Teorema 3:** *Seja  $f$  definida em  $x_0, x_1, \dots, x_k$  e sejam  $x_j$  e  $x_i$  dois números distintos neste conjunto. Então,*

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P_{0,1,\dots,j-1,j+1,\dots,k}(x) - (x - x_i)P_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots,k}(x)}{(x_i - x_j)}$$

*descreve o  $k$ -ésimo polinômio de Lagrange que interpola  $f$  nos  $k + 1$  pontos  $x_0, x_1, \dots, x_k$ .*

# Método de Neville

O Teorema 3 implica que os polinômios interpoladores podem ser gerados de maneira recursiva.

A tabela a seguir mostra como os cálculos podem ser feitos. Nesta tabela, cada coluna depende dos valores da coluna anterior.

$x_0$	$P_0 = Q_{0,0}$				
$x_1$	$P_1 = Q_{1,0}$	$P_{0,1} = Q_{1,1}$			
$x_2$	$P_2 = Q_{2,0}$	$P_{1,2} = Q_{2,1}$	$P_{0,1,2} = Q_{2,2}$		
$x_3$	$P_3 = Q_{3,0}$	$P_{2,3} = Q_{3,1}$	$P_{1,2,3} = Q_{3,2}$	$P_{0,1,2,3} = Q_{3,3}$	
$x_4$	$P_4 = Q_{4,0}$	$P_{3,4} = Q_{4,1}$	$P_{2,3,4} = Q_{4,2}$	$P_{1,2,3,4} = Q_{4,3}$	$P_{0,1,2,3,4} = Q_{4,3}$

Este procedimento para calcular os polinômios interpoladores é chamado de **Método de Neville**.

Para evitar os subscritos múltiplos de  $P$ , denotaremos por  $Q_{i,j}(x)$ ,  $0 \leq j \leq i$ , o polinômio interpolador de grau  $j$  nos  $(j + 1)$  números  $x_{i-j}, x_{i-j+1}, \dots, x_{i-1}, x_i$ . Isto é,

$$Q_{i,j} = P_{i-j, i-j+1, \dots, i-1, i}.$$



# Método de Neville - exemplo

Mais uma vez iremos aproximar o valor de  $f(1.5)$  para uma função desconhecida que tem valores da função em alguns pontos dados na tabela a seguir.

$x$	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

Iremos utilizar o **Método de Neville** para calcular esta aproximação.

Como  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 1.3$ ,  $x_2 = 1.6$ ,  $x_3 = 1.9$  e  $x_4 = 2.2$ , os valores de  $Q_{0,0} = f(1)$ ,  $Q_{1,0} = f(1.3)$ ,  $Q_{2,0} = f(1.6)$ ,  $Q_{3,0} = f(1.9)$  e  $Q_{4,0} = f(2.2)$  são os cinco polinômios de grau zero que aproximam  $f(1.5)$ .

# Método de Neville - exemplo

Assim, temos a primeira coluna da tabela  $Q$ :

$x_i$	$Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$	$Q_{i,3}$	$Q_{i,4}$
1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860				
1.6	0.4554022				
1.9	0.2818186				
2.2	0.1103623				

# Método de Neville - exemplo

Para calcular a aproximação usando o primeiro polinômio de grau um, temos

$$Q_{1,1}(x) = \frac{(x - x_0)Q_{1,0} - (x - x_1)Q_{0,0}}{x_1 - x_0}.$$

$$Q_{1,1}(1.5) = \frac{(1.5 - x_0)Q_{1,0} - (1.5 - x_1)Q_{0,0}}{x_1 - x_0} =$$

$$\frac{(1.5 - 1)Q_{1,0} - (1.5 - 1.3)Q_{0,0}}{1.3 - 1} =$$

$$\frac{0.5Q_{1,0} - 0.2Q_{0,0}}{0.3} = \frac{0.5 \times 0.6200860 - 0.2 \times 0.7651977}{0.3} = 0.5233449.$$

# Método de Neville - exemplo

Para calcular a aproximação usando o segundo polinômio de grau um, temos

$$Q_{2,1}(1.5) = \frac{(1.5 - x_1)Q_{2,0} - (1.5 - x_2)Q_{1,0}}{x_2 - x_1} =$$
$$\frac{(1.5 - 1.3)0.4554022 - (1.5 - 1.6)0.6200860}{1.6 - 1.3} = 0.5102968.$$

Como 1.5 está entre 1.3 e 1.6, esperamos que esta seja a melhor aproximação de  $f(1.5)$  usando polinômio interpolador de grau um.

Para calcular a aproximação usando o terceiro polinômio de grau um, temos

$$Q_{3,1}(1.5) = \frac{(1.5 - x_2)Q_{3,0} - (1.5 - x_3)Q_{2,0}}{x_3 - x_2} =$$
$$\frac{(1.5 - 1.6)0.2818186 - (1.5 - 1.9)0.4554022}{1.9 - 1.6} = 0.5132634.$$

Para calcular a aproximação usando o quarto polinômio de grau um, temos

$$Q_{4,1}(1.5) = \frac{(1.5 - x_3)Q_{4,0} - (1.5 - x_4)Q_{3,0}}{x_4 - x_3} =$$
$$\frac{(1.5 - 1.9)0.1103623 - (1.5 - 2.2)0.2818186}{2.2 - 1.9} = 0.510427.$$

# Método de Neville - exemplo

Assim, temos a segunda coluna da tabela  $Q$ :

$x_i$	$Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$	$Q_{i,3}$	$Q_{i,4}$
1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860	0.5233449			
1.6	0.4554022	0.5102968			
1.9	0.2818186	0.5132634			
2.2	0.1103623	0.5104270			



# Método de Neville - exemplo

Para calcular a aproximação usando o primeiro polinômio de grau dois, temos

$$Q_{2,2}(1.5) = \frac{(1.5 - x_0)Q_{2,1} - (1.5 - x_2)Q_{1,1}}{x_2 - x_0} =$$
$$\frac{(1.5 - 1)0.5102968 - (1.5 - 1.6)0.5233449}{1.6 - 1} = 0.5124715.$$

# Método de Neville - exemplo

Para calcular a aproximação usando o segundo polinômio de grau dois, temos

$$Q_{3,2}(1.5) = \frac{(1.5 - x_1)Q_{3,1} - (1.5 - x_3)Q_{2,1}}{x_3 - x_1} =$$
$$\frac{(1.5 - 1.3)0.5132634 - (1.5 - 1.9)0.5102968}{1.9 - 1.3} = 0.5112857.$$

# Método de Neville - exemplo

Para calcular a aproximação usando o terceiro polinômio de grau dois, temos

$$Q_{4,2}(1.5) = \frac{(1.5 - x_2)Q_{4,1} - (1.5 - x_4)Q_{3,1}}{x_4 - x_2} =$$
$$\frac{(1.5 - 1.6)0.510427 - (1.5 - 2.2)0.5132634}{2.2 - 1.6} = 0.5137361.$$

# Método de Neville - exemplo

Assim, temos a terceira coluna da tabela  $Q$ :

$x_i$	$Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$	$Q_{i,3}$	$Q_{i,4}$
1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860	0.5233449			
1.6	0.4554022	0.5102968	0.5124715		
1.9	0.2818186	0.5132634	0.5112857		
2.2	0.1103623	0.5104270	0.5137361		

## Método de Neville - exemplo

Da mesma forma, calculamos a quarta e quinta colunas da tabela  $Q$ , obtendo:

$x_i$	$Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$	$Q_{i,3}$	$Q_{i,4}$
1.0	0.7651977				
1.3	0.6200860	0.5233449			
1.6	0.4554022	0.5102968	0.5124715		
1.9	0.2818186	0.5132634	0.5112857	0.5118127	
2.2	0.1103623	0.5104270	0.5137361	0.5118302	0.5118200

# Método de Neville - exemplo

Vejamos agora um exemplo da aplicação do Método de Neville para aproximar uma função conhecida.

A tabela a seguir mostra valores de  $\ln(x)$  para alguns  $x_i$  dados, com as casas decimais dadas corretas.

$i$	$x_i$	$\ln(x_i)$
0	2.0	0.6931
1	2.2	0.7885
2	2.3	0.8329

# Método de Neville - exemplo

Utilizando o Método de Neville para aproximar o valor de  $f(2.1) = \ln(2.1)$ , temos

$i$	$x_i$	$x - x_i$	$Q_{i,0}$	$Q_{i,1}$	$Q_{i,2}$
0	1.0	0.1	0.6931		
1	2.2	-0.1	0.7885	0.7410	
2	2.3	-0.2	0.8329	0.7441	0.7420

Logo,  $P_2(2.1) = Q_{2,2} = 0.7420$ .

Como  $f(2.1) = \ln(2.1) = 0.7419$  com precisão de quatro casas decimais, o erro absoluto é

$$|f(2.1) - P_2(2.1)| = |0.7419 - 0.7420| = 10^{-4}.$$



No entanto,  $f'(x) = 1/x$ ,  $f''(x) = -1/x^2$  e  $f'''(x) = 1/x^3$ . Então, a fórmula do erro fornece

$$|f(2.1) - P_2(2.1)| = \left| \frac{f'''(\xi(2.1))}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \right| =$$

$$\left| \frac{1}{3(\xi(2.1))^3} (0.1)(-0.1)(-0.2) \right| \leq \frac{0.002}{3 \times 2^3} = 8.\bar{3} \times 10^{-5}.$$

Note que, nos cálculos feitos, o erro excedeu o limitante teórico.

Isso acontece porque usamos uma precisão de 4 casas decimais, enquanto o resultado teórico pressupõe que os cálculos sejam feitos em aritmética de precisão infinita.

**Interpolação iterada de Neville:** dados os números distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , os valores  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$  como a primeira coluna  $Q_{0,0}, Q_{1,0}, \dots, Q_{n,0}$  de  $Q$  e um número  $x$ , calcula a tabela  $Q$  tal que  $P(x) = Q_{n,n}$ , com  $P(x)$  polinômio interpolador de  $f$  nos pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

**Passo 1:** Para  $i = 1, \dots, n$ , execute o passo 2:

**Passo 2:** Para  $j = 1, \dots, i$ , faça

$$Q_{i,j} \leftarrow \frac{(x-x_{i-j})Q_{i,j-1} - (x-x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}.$$

**Passo 3:** Devolva  $Q$  e pare.

# Método de Neville

O algoritmo pode ser modificado a fim de permitir que novas linhas sejam inseridas na tabela  $Q$ .

Isto pode ser feito, por exemplo, até que a desigualdade

$$|Q_{i,i} - Q_{i-1,j-1}| < \epsilon,$$

com  $\epsilon$  dado, seja satisfeita.