Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Sistemas lineares

Minimos Quadrados - Caso contínuo

6 May 2008 . 17:21

Caso discreto

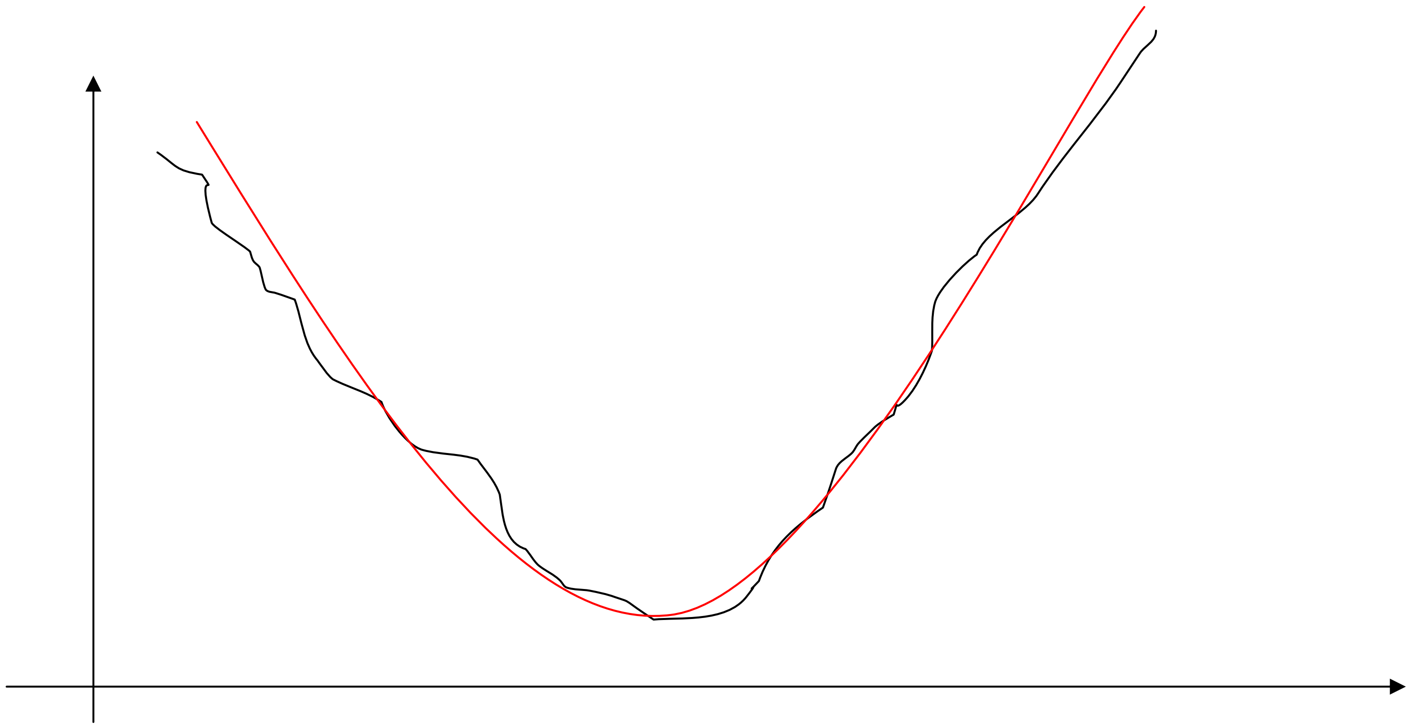
- Vimos que o método dos mínimos quadrados pode ser usado para determinar a função:

  $$g(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \dots + a_n g_n(x)$$

  que melhor aproxima uma série de pontos $(x_i, f(x_i))$, no sentido de minimização do erro quadrático.

Caso contínuo

- Vamos ver agora como usar o método para obter uma função que aproxima não apenas uma série de pontos, mas uma função contínua:



Caso contínuo

- Nesse caso, o erro será dado pela área entre as curvas. Para minimizar o erro quadrático, necessitamos:

$$E(a_1, ..., a_n) = \int_a^b (f(x) - a_1 g_1(x) - a_2 g_2(x) - ... a_n g_n(x))^2 dx$$

- E como antes, queremos encontrar os parâmetros a_1, ... a_n que minimizam este erro.

Condição de mínimo

- O ponto de mínimo, necessariamente, satisfaz:

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = \frac{\partial E}{\partial a_2} = \ldots = \frac{\partial E}{\partial a_n} = 0$$

Logo, derivando a expressão do erro quadrático em relação a a_1, temos:

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = -2 \int_a^b (f(x) - \sum_{k=0}^m a_k g_k(x) g_1(x))dx \quad = 0$$

No caso geral, derivando em relação a a_i:

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = -2 \int_a^b (f(x) - \sum_{k=0}^m a_k g_k(x) g_i(x))dx \quad = 0$$

Produto escalar de funções

- Vamos denotar o produto escalar de funções por:

$$< f, g > \; = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Igualando todas as derivadas parciais a zero, temos, portanto o seguinte sistema de equações normais:

$$\begin{bmatrix} < g_1, g_1 > & < g_1, g_2 > & \cdots & < g_1, g_n > \\ < g_2, g_1 > & < g_2, g_2 > & \cdots & < g_2, g_n > \\ < g_3, g_1 > & < g_3, g_2 > & \cdots & < g_3, g_n > \\ \vdots & & & \\ < g_4, g_1 > & < g_n, g_2 > & \cdots & < g_1, g_n > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < g_1, f > \\ < g_2, f > \\ < g_3, f > \\ \vdots \\ < g_n, f > \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema

- Se o determinante do sistema de equações normais for diferente de zero, então há um ajuste único de parâmetros que minimiza o erro quadrático.

- Quando as funções escolhidas (g_1, g_2...g_n) forem linearmente independentes, o determinante será diferente de zero!

Exemplo

(Arenales/Darezo, ex. 4.16): Usando o método dos mínimos quadrados, aproxime a função $f(x) = e^{-x}$ no intervalo [1,3] por um polinômio de grau 1, da forma: $g(x) = a_1 + a_2x$

Solução:

$g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$.

O sistema de equações normais é dado por:

$$\begin{bmatrix} <1,1> & <1,x> \\ <x,1> & <x,x> \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <1,e^{-x}> \\ <x,e^{-x}> \end{bmatrix}$$

Resolvendo as integrais

Lembrete: $\int xe^{bx}dx = \frac{e^{bx}}{b}\left(x^2 - \frac{1}{b}\right)$

$$< 1, 1 >= \int_a^b 1dx = 2$$

$$< 1, x >= \int_a^b xdx = 4$$

$$< x, x >= \int_a^b x^2dx = 26/3$$

$$< 1, e^{-x} >= \int_1^3 e^{-x}dx = 0.3181$$

$$< x, e^{-x} >= \int_1^3 xe^{-x}dx = 0.5366$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8.6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3181 \\ 0.5366 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

a_1 = -0.0832

a_2 = 0.1003

Graficamente:

$$g(x) = 0.458 - 0.149x$$