

# Resolução de sistemas de equações não-lineares: Método Iterativo Linear

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

27 de março de 2015

Baseado no livro *Análise Numérica*, de R. L. Burden e J. D. Faires.

# Sistemas de equações não-lineares

Um sistema de equações não-lineares tem a forma

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\&\vdots \\f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0,\end{aligned}$$

com  $f_i$  função de  $\mathbf{R}^n$  em  $\mathbf{R}$ .

# Sistemas de equações não-lineares

Um sistema de equações não-lineares pode ser representado definindo-se uma função  $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Desta forma, o sistema pode ser escrito como

$$F(x) = 0.$$

# Exemplo

O sistema

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0, \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \text{sen}(x_3) + 1.06 = 0, \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0 \end{cases}$$

pode ser escrito na forma  $F(x) = 0$ , definindo-se

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2},$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \text{sen}(x_3) + 1.06,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3}.$$

# Exemplo

Assim, o sistema pode ser escrito como

$$F(x) = F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \text{sen}(x_3) + 1.06 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi-3}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

# Informações preliminares

Antes de vermos como resolver um sistema de equações não-lineares, precisamos de algumas informações sobre continuidade e diferenciabilidade de funções de  $\mathbf{R}^n$  em  $\mathbf{R}$ .

**Definição 1:** Seja  $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ . Diz-se que a função  $f$  tem *limite*  $L$  em  $x_0$ , denotado

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

se, dado qualquer número  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  com

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

sempre que  $x \in D$  e

$$0 < \|x - x_0\| < \delta.$$

Qualquer norma pode ser usada na **Definição 1**. Uma mudança de normas implicará na mudança do valor de  $\delta$  a ser escolhido, mas a existência de um  $\delta$  independe da norma usada.

**Definição 2:** Seja  $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ . A função  $f$  é *contínua* em  $x_0 \in D$  se o limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Além disso,  $f$  é *contínua* em um conjunto  $D$ , denotado por  $f \in \mathcal{C}(D)$ , se  $f$  for contínua em cada ponto de  $D$ .

**Definição 3:** Seja  $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  da forma

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

com  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . Definimos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = L = (l_1, l_2, \dots, l_n)^T$$

se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = l_i$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ .



**Teorema 1:** *Sejam  $f : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  e  $x_0 \in D$ . Se todas as derivadas parciais de  $f$  existirem e se existirem constantes  $\delta > 0$  e  $K > 0$  tais que, sempre que  $\|x - x_0\| < \delta$  e  $x \in D$ , tenhamos*

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right| \leq K,$$

*para  $j = 1, 2, \dots, n$ , então a função  $f$  é contínua em  $x_0$ .*

**Definição 4:** A função  $G : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tem um *ponto fixo* em  $p \in D$  se  $G(p) = p$ .

O **Teorema 2**, a seguir, combina as definições e teoremas apresentados até aqui e define um método para encontrar uma solução de um sistema de equações não-lineares, bem como as condições para que o método convirja. Este método é conhecido com **Método Iterativo Linear**.

**Teorema 2:** *Seja  $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$  para algum conjunto de constantes  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ . Suponha que  $G : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  seja contínua, com a propriedade de que  $G(x) \in D$ , sempre que  $x \in D$ . Então  $G$  tem um ponto fixo em  $D$ .*

**Teorema 2 (continuação):** *Suponha, além disso, que todas as funções componentes  $g_i$  de  $G$  tenham derivadas parciais contínuas e que exista uma constante  $K < 1$  com*

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{K}{n},$$

*para todo  $x \in D$ ,  $j = 1, \dots, n$  e  $i = 1, \dots, n$ . Então, a sequência  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ , definida por*

$$x^{(k)} = G(x^{(k-1)}),$$

*para  $k \geq 1$  e  $x_0 \in D$  arbitrário, converge para o único ponto fixo  $p \in D$  e*

$$\|x^{(k)} - p\|_{\infty} \leq \frac{K^k}{1 - K} \|x^{(0)} - x^{(1)}\|_{\infty}.$$

# Exemplo

Considere o sistema não-linear

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0, \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \text{sen}(x_3) + 1.06 = 0, \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi-3}{3} = 0. \end{cases}$$

Se, em cada  $i$ -ésima equação, isolamos a variável  $x_i$ , temos

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \cos(x_2x_3) + \frac{1}{6} = g_1(x), \\ x_2 = \frac{1}{9} \sqrt{x_1^2 + \text{sen}(x_3) + 1.06} - 0.1 = g_2(x), \\ x_3 = -\frac{1}{20} e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi-3}{60} = g_3(x). \end{cases}$$

Seja  $G : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por

$$G(x) = (g_1(x_1, x_2, x_3), g_2(x_1, x_2, x_3), g_3(x_1, x_2, x_3))^T.$$

Usaremos os **Teoremas 1** e **2** para mostrar que  $G$  tem um único ponto fixo em

$$D = \{(x_1, x_2, x_3)^T \mid -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}.$$

# Exemplo

Para todo  $x \in D$ , vale que

$$|g_1(x)| \leq \frac{1}{3} |\cos(x_2 x_3)| + \frac{1}{6} \leq 0.5,$$

$$|g_2(x)| = \left| \frac{1}{9} \sqrt{x_1^2 + \text{sen}(x_3) + 1.06} - 0.1 \right| \leq$$

$$\frac{1}{9} \sqrt{1^2 + \text{sen}(1) + 1.06} - 0.1 < 0.09,$$

$$|g_3(x)| = \frac{1}{20} e^{-x_1 x_2} + \frac{10\pi - 3}{60} \leq \frac{1}{20} e^1 + \frac{10\pi - 3}{60} < 0.61.$$

## Exemplo

Portanto, para todo  $x \in D$ , temos que  $G(x) \in D$ .

Vamos, agora, calcular os limitantes das derivadas parciais de  $g_1$ ,  $g_2$  e  $g_3$ , quando calculadas em pontos  $x \in D$ .

Como

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial g_3(x)}{\partial x_3} = 0,$$

temos que, para todo  $x \in D$ ,

$$\left| \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} \right| = \left| \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} \right| = \left| \frac{\partial g_3(x)}{\partial x_3} \right| = 0.$$



Como

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} = -\frac{1}{3}x_3 \text{sen}(x_2x_3),$$

temos que, para todo  $x \in D$ ,

$$\left| \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} \right| \leq \frac{1}{3} |x_3| |\text{sen}(x_2x_3)| \leq \frac{1}{3} \text{sen}(1) < 0.281.$$

Como

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_3} = -\frac{1}{3}x_2 \text{sen}(x_2 x_3),$$

temos que, para todo  $x \in D$ ,

$$\left| \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_3} \right| \leq \frac{1}{3} |x_2| |\text{sen}(x_2 x_3)| \leq \frac{1}{3} \text{sen}(1) < 0.281.$$

Como

$$\frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} = \frac{x_1}{9\sqrt{x_1^2 + \sin(x_3)} + 1.06},$$

temos que, para todo  $x \in D$ ,

$$\left| \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} \right| = \frac{|x_1|}{9\sqrt{x_1^2 + \sin(x_3)} + 1.06} < \frac{1}{9\sqrt{0.218}} < 0.238.$$

Como

$$\frac{\partial g_2(x)}{\partial x_3} = \frac{\cos(x_3)}{18\sqrt{x_1^2 + \text{sen}(x_3)} + 1.06},$$

temos que, para todo  $x \in D$ ,

$$\left| \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_3} \right| = \frac{|\cos(x_3)|}{18\sqrt{x_1^2 + \text{sen}(x_3)} + 1.06} < \frac{1}{18\sqrt{0.218}} < 0.119.$$

Como

$$\frac{\partial g_3(x)}{\partial x_1} = \frac{1}{20} x_2 e^{-x_1 x_2},$$

temos que, para todo  $x \in D$ ,

$$\left| \frac{\partial g_3(x)}{\partial x_1} \right| \leq \frac{1}{20} |x_2| e^{-x_1 x_2} \leq \frac{1}{20} e < 0.14.$$

Como

$$\frac{\partial g_3(x)}{\partial x_2} = \frac{1}{20} x_1 e^{-x_1 x_2},$$

temos que, para todo  $x \in D$ ,

$$\left| \frac{\partial g_3(x)}{\partial x_2} \right| \leq \frac{1}{20} |x_1| e^{-x_1 x_2} \leq \frac{1}{20} e < 0.14.$$

Ou seja, as derivadas de  $g_1$ ,  $g_2$  e  $g_3$  são limitadas em  $D$  e, pelo **Teorema 1**,  $g_1$ ,  $g_2$  e  $g_3$  são contínuas em  $D$ . Consequentemente, a função  $G$  é contínua em  $D$ .

Além disso, para todo  $x \in D$ ,

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq 0.281,$$

para  $i = 1, 2, 3$  e  $j = 1, 2, 3$ .

Portanto, tomando  $K = 3 \times 0.281 = 0.843$ , vale a segunda parte do **Teorema 2**.

Do mesmo modo, podemos mostrar que as derivadas parciais  $\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}$ ,  $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$ , são contínuas.

Assim, pelo **Teorema 2**, temos que  $G$  tem um único ponto fixo em  $D$ . O que significa que o sistema não-linear original tem solução.

Note que o fato de o ponto fixo ser único não quer dizer que o sistema não-linear tenha solução única. Isso porque a definição das funções  $g_1$ ,  $g_2$  e  $g_3$  podem variar.



## Exemplo

Para aproximar o ponto fixo de  $G$  em  $D$ , usamos  $x^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)^T$ .

Os iterandos são gerados usando

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{3} \cos(x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)}) + \frac{1}{6},$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{9} \sqrt{\left(x_1^{(k-1)}\right)^2 + \operatorname{sen}\left(x_3^{(k-1)}\right) + 1.06} - 0.1,$$

$$x_3^{(k)} = -\frac{1}{20} e^{-x_1^{(k-1)} x_2^{(k-1)}} - \frac{10\pi - 3}{60}.$$

# Exemplo

A tabela a seguir mostra os resultados do uso do **Método Iterativo Linear**. Os iterandos foram gerados até que a condição  $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty < 10^{-5}$  fosse satisfeita.

$k$	$(x^{(k)})^T$	$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ _\infty$
0	(0.10000000, 0.10000000, -0.10000000)	
1	(0.49998333, 0.00944115, -0.52310127)	0.423
2	(0.49999593, 0.00002557, -0.52336331)	$9.4 \times 10^{-3}$
3	(0.50000000, 0.00001234, -0.52359814)	$2.3 \times 10^{-4}$
4	(0.50000000, 0.00000003, -0.52359847)	$1.2 \times 10^{-5}$
5	(0.50000000, 0.00000002, -0.52359877)	$3.1 \times 10^{-7}$