# Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

## Sistemas lineares

## Método de eliminação de Gauss - Estratégias de pivoteamento

3 Oct 2008 . 15:55

# Gauss (revisão)

- O método de eliminação de Gauss funciona criando uma matriz triangular superior:

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\
\dots & \dots & & & & \\
a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)}
\end{array}\right), \longrightarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
 & \dots & & & & \vdots \\
 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)}
\end{array}\right),
$$

$$
\downarrow
$$

$$
\dots \longleftarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
 & & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\
 & & \dots & & & \vdots \\
 & & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)}
\end{array}\right)
$$

# Multiplicadores

- Cada iteração, requer o cálculo dos multiplicadores:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k}$$

Exemplo:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \dots & \dots & & & & \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right),$$

precisamos calcular:

$$m_{21} = \frac{a_{21}^1}{a_{11}^1}$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}^1}{a_{11}^1}$$

...

E se $a_{kk}$ for nulo ? ou muito próximo de zero ?

# Consequências:

- Se for nulo: procedimento inviável.
- Se for próximo de zero: dão origens a número muito grandes que originam ampliação dos erros de arredondamento.

**Solução:**

Estratégias de pivoteamento.

# Estratégia de pivoteamento parcial

- No início de cada iteração, escolher como pivô o maior elemento (em módulo) da coluna k, $a_{ik}$, i=k,k+1,...n.
- se $i \neq k$, trocar as linhas k e i.

# Exemplo (Ruggiero & Lopes)

n = 4, k=2.

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

Escolhemos como pivô o elemento $a_{32}$, que é o que tem maior valor em módulo, e trocamos as linhas 3 e 2.

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

# Exemplo (Ruggiero & Lopes)

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

- O procedimento continua normalmente, lembrando que agora a linha 2 está associada à variável 3 e a linha 3 associada à variável 2.

# Estratégia de pivoteamento completo

- Nesta estratégia, escolhe-se o elemento de maior módulo dentre todos os elementos ainda participando do processo de eliminação.

- No exemplo:

$$A^{(2)}|b^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

No caso, trocaríamos as colunas 2 e 4 e depois as linhas 2 e 3.

- A estratégia de pivoteamento completo é menos empregada porque implica em grande esforço computacional:
  - necessita a comparação de todos os elementos da submatriz dos elementos ainda participando do processo de eliminação.
  - troca de linhas e colunas

# Exemplo

- Resolver o sistema abaixo com regra de pivoteamento completo.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\
x_1 + 2x_3 &= 3 \\
3x_2 - x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

# Exemplo (Resolução)

- Resolver o sistema abaixo com regra de pivoteamento completo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -3/2 & 5/2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -3/2 & 5/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{array}}$$

# Exemplo (Ruggiero & Lopes)

- Resolva o sistema abaixo supondo que você tenha que trabalhar na base F(10,3,-10,10)

$$\begin{cases} 0.0002x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

a) Sem usar regras de pivoteamento
b) Usando pivoteamento