Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Sistemas lineares
Método de eliminação de Gauss

Alysson M. Costa

12 May 2008 . 14:27

O que sabemos

15:37

- Podemos multiplicar uma linha de um sistema por um escalar e somar com outra linha... O sistema continua válido:

Ex.:

x 2

A	B	C
x + y = 3 x - y = 5	2x + 2y = 6 x - y = 5	x + 3y = 1 x - y = 5

-

A, B e C são equivalentes! x = 4, y = -1

Qual a vantagem ?

15:37

- Obviamente, de A para B para C, não ganhamos nada. Mas se fizermos:

A	D
x + y = 3 x - y = 5	x + y = 3 -2y = 2

-

sabemos resolver facilmente!

Queremos um sistema triangular:

15:37

- Sabemos resolver muito facilmente um sistema triangular:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a_{11}\, x_1 & + & a_{12}\, x_2 & + & a_{13}\, x_3 & \dots + & a_{1n}\, x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}\, x_2 & + & a_{23}\, x_3 & \dots + & a_{2n}\, x_n & = & b_2 \\ & & & & a_{33}\, x_3 & \dots + & a_{3n}\, x_n & = & b_n \\ & & & & & & \dots\dots & & \vdots \\ & & & & & & a_{nn}\, x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_n & = & \dfrac{b_n}{a_{nn}}\,, \\ x_i & = & \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j}{a_{ii}}\,, \quad i = n-1,\dots,1\,. \end{array}\right.$$

Como fazer ?

15:37

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \dots & \dots & & & & \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right),$$

zerar estes elementos

Como eliminar os elementos indesejados ?

15:37

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \dots & \dots & & & & \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right),$$

nª linha = nª linha - 1ª linha multiplicada por $a_{n1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$

3ª linha = 3ª linha - 1ª linha multiplicada por $a_{31}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$

2ª linha = 2ª linha - 1ª linha multiplicada por $a_{21}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$

Ficamos com:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & \dots & & & & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right),$$

onde:

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, & i = 2,3,\dots,n\,; \\ & j = 1,2,\dots,n\,. \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - b_1^{(1)} \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, & \end{cases}$$

Para eliminar os elementos indesejados da segunda coluna:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & \dots & & & & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right),$$

nª linha = nª linha - 1ª linha multiplicada por $a_{n2}^{(2)}/ a_{22}^{(2)}$

3ª linha = 3ª linha - 1ª linha multiplicada por $a_{32}^{(2)}/ a_{22}^{(2)}$

e assim por diante... acabamos com:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3,n-1}^{(3)} & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ & & & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ & & & & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} & b_{n-1}^{(n-1)} \\ & & & & & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array}\right),$$

$$\begin{cases} a_{ij}^{(n)} = a_{ij}^{(n-1)} - a_{n-1,j}^{(n-1)} \dfrac{a_{i,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}, & i = n\,; \\ & j = n-1, n\,. \\ b_i^{(n)} = b_i^{(n-1)} - b_{n-1}^{(n-1)} \dfrac{a_{i,n-1}^{(n-1)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}, & \end{cases}$$

Observações (1/3)

- Para efetuar as operações de eliminação da primeira coluna, necessitamos que $a_{11} \neq 0$.

Observações (2/3)

- Para efetuar as operações de eliminação da primeira coluna, necessitamos que $a_{11} \neq 0$.
- Para efetuar as operações de eliminação da segunda coluna, necessitamos $a_{22}^{(2)} \neq 0$. O que isso significa ?
  - Quando da eliminação de a_{21}, não pode aparecer zero em $a_{22}^{(2)}$. Ou seja:

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$$

Observações (3/3)

- Para efetuar as operações de eliminação da primeira coluna, necessitamos que $a_{11} \neq 0$.
- Para efetuar as operações de eliminação da segunda coluna, necessitamos $a_{22}^{(2)} \neq 0$. O que isso significa ?
  - Quando da eliminação de a_{21}, não pode aparecer zero em $a_{22}^{(2)}$. Ou seja:

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$$

- No caso geral:

$$det A_k \neq 0$$

onde A_k são os menores principais

Exemplo

Resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 13 \end{array}\right)$$

Exemplo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 13 \end{array}\right)$$

Eliminando a_{21}:
2ª linha = 2ª linha - 1ª linha ¢ a_{21}/a_{11}
! 2ª linha = 2ª linha - 1ª linha ¢ 2/6
! 2ª linha = 2ª linha - 1ª linha ¢ 1/3
! 2ª linha = 2ª linha - (2 2/3 -1/3 | 7/3)

Eliminando a_{31}:
3ª linha = 3ª linha - 1ª linha ¢ a_{31}/a_{11}
! 3ª linha = 3ª linha - 1ª linha ¢ 3/6
! 3ª linha = 3ª linha - 1ª linha ¢ 1/2
! 3ª linha = 3ª linha - (3 1 -1/2 | 7/2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 10/3 & 4/3 & 14/3 \\ 0 & 1 & 17/2 & 19/2 \end{array}\right)$$

Exemplo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 10/3 & 4/3 & 14/3 \\ 0 & 1 & 17/2 & 19/2 \end{array}\right)$$

Eliminando a_{32}:
3ª linha = 3ª linha - 2ª linha ¢ a_{32}/a_{22}
! 2ª linha = 2ª linha - 2ª linha ¢ 1/(10/3)
! 2ª linha = 2ª linha - 2ª linha ¢ 3/10
! 2ª linha = 2ª linha - (0 1 2/5 | 7/5)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 10/3 & 4/3 & 14/3 \\ 0 & 0 & 81/10 & 81/10 \end{array}\right)$$

Exemplo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 10/3 & 4/3 & 14/3 \\ 0 & 0 & 81/10 & 81/10 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 10/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 81/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14/3 \\ 81/10 \end{pmatrix}$$

$81/10x_3 = 81/10$! $x_3 = 1$
$10/3\ x_2 + 4/3 = 14/3$! $x_2 = 1$
$6x_1 + 2 - 1 = 7$! $x_1 = 1$