Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Sistemas lineares
Métodos Iterativos: Introdução

7 Nov 2008 . 16:44

Métodos exatos

- Métodos como:
  - Método de eliminação de Gauss
  - Método de decomposição LU
  - Método de Cholesky

  são ditos exatos: obtém a solução final após um número k de passos.

- Em alguns casos/aspectos, métodos iterativos têm algumas vantagens.

  - são melhores em matrizes esparsas
  - apresentam auto-correção de erros (podem ser usados para melhorar a solução obtida por métodos exatos).

Idéia geral

- Similar à idéia dos método iterativo linear para resolução de equações.

Queremos resolver: $\boxed{Ax = b}$

E reescrevemos o sistema como:

$$\boxed{x = Bx + g}$$

($B = I - A$, $g = b$, por exemplo)

Idéia geral

- De posse de $x = Bx + g$:
  - Chutamos um valor inicial para x: $x^{(0)}$.
  - Obtemos:

$$x^{(1)} = Bx^{(0)} + g.$$
$$x^{(2)} = Bx^{(1)} + g.$$
$$x^{(3)} = Bx^{(2)} + g.$$
$$\ldots$$
$$\boxed{x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g.}$$

Assim,

$$x_{k+1} = \psi(x_k)$$

Convergência

- A série converge ?
- Critério: A série será convergente se, para qualquer norma de matrizes, $||B|| < 1$.

- <u>Demonstração:</u>

$e^{(k)} = x - x^{(k)}$

Mas $x = Bx + g$ (5.1)

$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g$ (5.2)

Logo: $e^{(k)} = B(x - x^{(k-1)}) = B\, e^{(k-1)}$

Convergência

$e^{(k)} = B(x - x^{(k-1)}) = B\, e^{(k-1)}$

Desta forma, temos que:

$e^{(k)} = B\, e^{(k-1)}$

$e^{(k-1)} = B\, e^{(k-2)}$

Logo: $e^{(k)} = B^2 e^{(k-2)}$

E, se aplicamos sucessivamente:

$e^{(k)} = B^k e^{(0)}$

Convergência

$e^{(k)} = B^k e^{(0)}$

Usando normas consistentes (def. 1.14 do livro):

$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$ e logo,

$||e^{(k)}|| \leq ||B^k|| \cdot ||e^{(0)}||$

Que tende a zero quando $||B|| < 1$.

B é chamada a **matriz de iteração** do processo iterativo

Conclusão

Condição suficiente:

O sistema é convergente se, para uma norma qualquer de matrizes, $||B||<1$.

Uma condição **necessária e suficiente**:

$\max |\lambda_i| < 1$, onde λ_i são os autovalores de B

Por hora, vamos nos preocupar com a condição suficiente. Depois veremos como calcular os autovalores de B.

Algumas normas convergentes

$$||A||_\infty = max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$ norma linha

$$||A||_1 = max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$ norma coluna

$$||A||_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$ norma Euclidiana

- Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$||A||_\infty = |6| + |3| + |4| = 13$$

$$||A||_1 = |3| + |6| + |-1| = 10$$

$$||A||_E = (9+4+1+36+9+16+1+4+1)^{1/2} = 9$$

Exemplo (convergência)

$$B = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ -0.3 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Um sistema Ax=b que seja reescrito na forma:

$$x = Bx + g$$

Irá convergir quando o método iterativo for aplicado ?

$\| B \|_\infty = 1.2$ Não podemos concluir... tentemos outra norma:

$\| B \|_1 = 0.9 < 1$ Convergência garantida!