

Autovalores e Autovetores

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

27 de agosto de 2013

Baseado no livro Cálculo Numérico, de Neide B. Franco.

Definição: um escalar $\lambda \in \mathbf{R}$ é um autovalor da matriz A , se existe um vetor não nulo $v \in \mathbf{R}^n$, tal que $Av = \lambda v$.

Todo vetor v que satisfaz essa relação é chamado de autovetor de A correspondente ao autovalor λ .

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Temos que

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Se v é um autovetor de A associado a um autovalor λ , temos que $Av = \lambda v$. Ou seja, $Av - \lambda v = 0 \Rightarrow$

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Se $\det(A - \lambda I) \neq 0$, então o sistema linear acima tem uma única solução $v = 0$.

Para calcular um autovetor v , precisamos que $v \neq 0$, com $Av = \lambda v$.

Polinômio característico

Assim, vamos impor que $\det(A - \lambda I) = 0$, ou seja,

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0,$$

com $P(\lambda)$ um polinômio em λ de grau n .

Os autovalores de A são as raízes deste polinômio.

$P(\lambda)$ é chamado de **polinômio característico** da matriz A .

Exemplo

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. O polinômio característico de A é dado por

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

As raízes de P são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -1$.

Seja $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Se (λ, v) é um par autovalor-autovetor da matriz A , então $(\lambda + \alpha, v)$ é um par autovalor-autovetor da matriz $A + \alpha I$, com I a matriz identidade de ordem n .

Demonstração: Se (λ, v) é um par autovalor-autovetor da matriz A , então $Av = \lambda v$. Como

$$(A + \alpha I)v = Av + \alpha v,$$

temos que

$$(A + \alpha I)v = \lambda v + \alpha v = (\lambda + \alpha)v.$$

Ou seja, $(\lambda + \alpha, v)$ é um par autovalor-autovetor da matriz $A + \alpha I$.

Seja $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. A é uma matriz singular se, e somente se, 0 é um de seus autovalores.

Demonstração: A é singular se, e somente se, existe um vetor v não-nulo tal que

$$Av = 0 = 0v.$$

Como v é não-nulo, v é autovetor de A e 0 é o autovalor de A associado a v .

Seja $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ não-singular e (λ_i, v_i) , $i = 1, \dots, n$, com $\lambda_i \in \mathbf{R}$, seus pares autovalor-autovetor. Então $(\frac{1}{\lambda_i}, v_i)$, $i = 1, \dots, n$, são os pares autovalor-autovetor de A^{-1} .

Demonstração: Se (λ_i, v_i) é um par autovalor-autovetor da matriz A , então

$$Av_i = \lambda_i v_i \Rightarrow A^{-1}Av_i = \lambda_i A^{-1}v_i \Rightarrow$$

$$v_i = \lambda_i A^{-1}v_i \Rightarrow \frac{1}{\lambda_i} v_i = A^{-1}v_i.$$

Ou seja, $(\frac{1}{\lambda_i}, v_i)$ é um par autovalor-autovetor da matriz A^{-1} .

Estudar métodos numéricos para a determinação de autovalores e seus correspondentes autovetores de uma matriz A de ordem n .

Existem métodos numéricos que determinam

- 1 o polinômio característico;
- 2 alguns autovalores;
- 3 todos os autovalores.