Determinação numérica de autovalores e autovetores: Método das Potências Inversas

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

3 de setembro de 2012

Vimos que o Método das Potências pode ser usado para determinar o maior autovalor em módulo de uma matriz A, e o autovetor associado.

Se fizermos uma pequena modificação no método, podemos calcular o menor autovalor em módulo de uma matriz A, e o autovetor associado.

Método das Potências Inversas

Considere uma matriz A, com autovalores $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n| > 0$, e autovetores associados $v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}$.

Como os módulos dos autovalores são estritamente positivos, a matriz A é inversível.

Método das Potências Inversas

Além disso, para todo j, temos que

$$Av^{(j)} = \lambda_j v^{(j)} \Rightarrow A^{-1}Av^{(j)} = \lambda_j A^{-1}v^{(j)} \Rightarrow$$

$$v^{(j)} = \lambda_j A^{-1}v^{(j)} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_j}v^{(j)} = A^{-1}v^{(j)}.$$

Ou seja, se λ_j é autovalor de A, com vetor associado $v^{(j)}$, temos que $\frac{1}{\lambda_j}$ é autovalor de A^{-1}, com vetor associado $v^{(j)}$.

Método das Potências Inversas

Note que os autovalores de A^{-1} são dados por
$\left|\frac{1}{\lambda_n}\right| \geq \left|\frac{1}{\lambda_{n-1}}\right| \geq \ldots \geq \left|\frac{1}{\lambda_1}\right| > 0$, com autovetores associados
$v^{(n)}, v^{(n-1)}, \ldots, v^{(n)}$.

Isso significa que, se usarmos o Método das Potências para calcular o maior autovalor em módulo de A^{-1}, calcularemos o inverso do menor autovalor em módulo de A.

O Método das Potências modificado para calcular o menor autovalor em módulo de A é chamado de Método das Potências Inversas.

No Método das Potências Inversas, no entanto, não calculamos a matriz A^{-1}. Em vez disso, no passo em que deveríamos calcular $y = A^{-1}x$, resolvemos o sistema $Ay = x$, em y.

Como vários sistemas serão resolvidos mantendo a matriz A e trocando apenas o valor de x, calculamos a Decomposição LU de A no início do método.

Algoritmo

Método das Potências Inversas: dados uma matriz $A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$, um vetor não nulo $x \in \boldsymbol{R}^n$, uma tolerância ϵ e um número máximo de iterações $MAXIT$, calcula μ (uma aproximação do menor autovalor em módulo de A) e uma aproximação do autovetor x, com $\|x\|_\infty = 1$, associado ao autovalor aproximado por μ, ou emite uma mensagem de erro.

Passo 1: Faça $k \leftarrow 1$.

Passo 2: Calcule p, $1 \leq p \leq n$, o menor índice tal que $|x_p| = \|x\|_\infty$.

Passo 3: Faça $x \leftarrow \frac{1}{x_p} x$.

Passo 4: Calcule as matrizes triangular inferior (L) e superior (U) tais que

$$A = LU.$$

Algoritmo

Passo 5: Enquanto ($k \leq MAXIT$), execute os passos 6 a 11:

Passo 6: Resolva o sistema $LUy = x$, para y.

Passo 7: Faça $\mu \leftarrow y_p$.

Passo 8: Calcule p, $1 \leq p \leq n$, o menor índice tal que $|y_p| = \|y\|_\infty$.

Passo 9: Se $y_p = 0$, então

Escreva "matriz singular" e pare.

Passo 10: Se $\|x - \frac{1}{y_p} y\|_\infty < \epsilon$, então

devolva $\frac{1}{\mu}$ como autovalor, x como autovetor e pare.

Passo 11: Faça $x \leftarrow \frac{1}{y_p} y$ e $k \leftarrow k + 1$.

Passo 12: Escreva "número máximo de iterações atingido" e pare.

Método das Potências Inversas

Uma propriedade de autovalores é que, se uma matriz A possui autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, com autovetores associados $v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(n)}$, a matriz $A - \alpha I$ possui autovalores $\lambda_1 - \alpha, \lambda_2 - \alpha, ..., \lambda_n - \alpha$, com os mesmos autovetores associados.

Usando este fato, ao aplicarmos o Método das Potências Inversas à matriz $A - \alpha I$, podemos determinar o autovalor de A mais próximo do valor α.