

# Resolução de sistemas de equações lineares: Fatorações de matrizes

Marina Andretta/Franklina Toledo

ICMC-USP

3 de setembro de 2012

Baseado no livro *Análise Numérica*, de R. L. Burden e J. D. Faires.

# Fatoração de matrizes

Como vimos, o **Método de eliminação de Gauss** usa  $O(n^3)$  operações para transformar um sistema em outro sistema triangular inferior equivalente.

Para resolver este sistema linear equivalente, são usadas  $O(n^2)$  operações com o **Método de substituição regressiva**.

Uma maneira de resolver um sistema linear  $Ax = b$  é fatorar a matriz  $A$ , ou seja, escrevê-la como o produto de duas outras matrizes.

Um caso de interesse é quando a matriz  $A$  é decomposta em  $A = LU$ , com  $L$  matriz triangular inferior e  $U$  triangular superior. Esta fatoração é chamada de **fatoração  $LU$** .

De posse destas matrizes  $L$  e  $U$ , o sistema original  $Ax = b$  pode ser facilmente resolvido.

Note que  $Ax = LUx = b$ . Então, primeiro resolvemos o sistema  $Ly = b$ , usando o **Método de substituição regressiva**. Em seguida, com  $y$  conhecido, resolvemos o sistema  $Ux = y$ , usando o **Método de substituição progressiva**.

# Método de eliminação de Gauss

Antes de analisarmos em que casos é possível fazer esta fatoração e como ela pode ser feita, analisemos o caso em que o **Método de eliminação de Gauss** pode ser aplicado sem que nenhuma troca de linhas seja necessária.

O primeiro passo do **Método de eliminação de Gauss** consiste em efetuar, para cada  $j = 2, 3, \dots, n$ , as operações

$$(E_j - m_{j1}E_1) \rightarrow (E_j),$$

em que

$$m_{j1} = \frac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}.$$

# Método de eliminação de Gauss

Estas operações fazem com que o sistema equivalente calculado tenha elementos nulos em todas as linhas abaixo da diagonal da primeira coluna.

Executar estas operações é equivalente a multiplicar a matriz original  $A$ , à esquerda, pela matriz

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Denotamos o produto da matriz  $M^{(1)}$  pela matriz original  $A \equiv A^{(1)}$  por  $A^{(2)}$ . E o produto da matriz  $M^{(1)}$  pelo vetor  $b \equiv b^{(1)}$  por  $b^{(2)}$ .

Ou seja, temos que

$$A^{(2)}x = M^{(1)}Ax = M^{(1)}b = b^{(2)}.$$

# Método de eliminação de Gauss

De forma análoga, podemos construir a matriz  $M^{(2)}$  como sendo a matriz identidade, com cada elemento da segunda coluna e da linha  $j$ , abaixo da diagonal (ou seja,  $j = 3, \dots, n$ ), substituído por

$$m_{j2} = \frac{a_{j2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}.$$

O produto da matriz  $M^{(2)}$  pela matriz  $A^{(2)}$  tem zeros nos elementos abaixo da diagonal das duas primeiras colunas. Ou seja,

$$A^{(3)}x = M^{(2)}A^{(2)}x = M^{(2)}M^{(1)}Ax = M^{(2)}M^{(1)}b = M^{(2)}b^{(2)} = b^{(3)}.$$

# Método de eliminação de Gauss

De maneira geral, com a matriz  $A^{(k)}$  formada, podemos multiplicá-la à esquerda pela matriz  $M^{(k)}$ , dada por

$$M^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -m_{(k+1)k} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -m_{(n-1)k} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -m_{nk} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e geramos a matriz  $A^{(k+1)}$ .



Assim,

$$A^{(k+1)}x = M^{(k)}A^{(k)}x = M^{(k)}\dots M^{(1)}Ax =$$

$$M^{(k)}\dots M^{(1)}b = M^{(k)}b^{(k)} = b^{(k+1)}.$$

# Método de eliminação de Gauss

O **Método de eliminação de Gauss** termina com a geração da matriz triangular superior  $A^{(n)}$ ,

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix},$$

dada por

$$A^{(n)} = M^{(n-1)}M^{(n-2)}\dots M^{(1)}A.$$

Lembre-se de que estamos interessados em escrever a matriz  $A$  como um produto  $A = LU$ , com  $L$  triangular inferior e  $U$  triangular superior.

Vamos denotar a matriz triangular superior  $A^{(n)}$  por  $U$ .

Vejam agora como obter a matriz triangular inferior  $L$ .

Primeiramente, lembre-se que

$$A^{(k+1)}_x = M^{(k)}A^{(k)}_x = M^{(k)}b^{(k)} = b^{(k+1)},$$

onde o produto de  $M^{(k)}$  por  $A^{(k)}$  representa as operações

$$(E_j - m_{jk}E_k) \rightarrow (E_j),$$

para  $j = k + 1, \dots, n$ .

A matriz inversa de  $M^{(k)}$ , que denotaremos por  $L^{(k)}$ , é dada por

$$L^{(k)} = (M^{(k)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_{(k+1)k} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & m_{(n-1)k} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_{nk} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$L^{(1)}L^{(2)}\dots L^{(n-2)}L^{(n-1)}U =$$

$$L^{(1)}L^{(2)}\dots L^{(n-2)}L^{(n-1)}M^{(n-1)}M^{(n-2)}\dots M^{(2)}M^{(1)}A =$$

$$(M^{(1)})^{-1}(M^{(2)})^{-1}\dots(M^{(n-2)})^{-1}(M^{(n-1)})^{-1}M^{(n-1)}M^{(n-2)}\dots M^{(2)}M^{(1)}A = A$$

Como

$$L = L^{(1)}L^{(2)}\dots L^{(n-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{(n-1)1} & m_{(n-1)2} & \dots & 1 & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{n(n-1)} & 1 \end{pmatrix}$$

é triangular inferior, denotaremos  $L = L^{(1)}L^{(2)}\dots L^{(n-1)}$ .

Assim,  $LU = A$ .

**Teorema 1:** Se o Método de eliminação de Gauss puder ser aplicado ao sistema linear  $Ax = b$ , sem trocas de linhas, então a matriz  $A$  pode ser fatorada como o produto de uma matriz triangular inferior  $L$  e uma matriz triangular superior  $U$ , tal que  $A = LU$ , com  $m_{ji} = \frac{a_{ji}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}$ ,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}.$$



Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

# Exemplo

Ao aplicar o Método de eliminação de Gauss, executamos as operações  $(E_2 - 2E_1) \rightarrow (E_2)$ ,  $(E_3 - 3E_1) \rightarrow (E_3)$ ,  $(E_4 - (-1)E_1) \rightarrow (E_4)$ ,  $(E_3 - 4E_2) \rightarrow (E_3)$ ,  $(E_4 - (-3)E_2) \rightarrow (E_4)$  para obter o seguinte sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} x_1 & + & x_2 & & + & 3x_4 & = & 4, \\ & & -x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7, \\ & & & & 3x_3 & + & 13x_4 & = & 13, \\ & & & & & - & 13x_4 & = & -13. \end{array} \right.$$

# Exemplo

Os multiplicadores  $m_{ij}$  e a matriz triangular superior produzem a fatoração

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} = LU.$$

# Exemplo

Esta fatoração permite que qualquer sistema linear, envolvendo a matriz  $A$ , seja facilmente resolvido.

Por exemplo, para resolver o sistema

$$Ax = LUx = b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

definimos  $Ux = y$ .

# Exemplo

Então, resolvemos o sistema

$$Ly = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

obtendo a solução

$$y_1 = 4, \quad y_2 = -7, \quad y_3 = 13, \quad y_4 = -13.$$

# Exemplo

Em seguida, resolvemos o sistema

$$Ux = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix},$$

obtendo a solução para o sistema original

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1.$$

Para que a fatoração  $LU$  seja única, usamos o Método de Doolittle, que exige que os elementos da diagonal da matriz  $L$  sejam iguais a um.

Outras formulações são possíveis, mas apresentaremos o algoritmo apenas para esta.

**Fatoração LU:** dadas a dimensão  $n$  e uma matriz  $A$ , com  $n$  linhas e colunas, devolve uma matriz triangular inferior  $L$  e uma superior  $U$ , tais que  $A = LU$ , ou emite uma mensagem de erro.

**Passo 1:** Faça  $L \leftarrow 0$  e  $U \leftarrow 0$ . Para  $j = 1, \dots, n$ , faça  $l_{jj} \leftarrow 1$ .

**Passo 2:** Para  $j = 1, \dots, n$ , faça  $u_{1j} \leftarrow a_{1j}$ . Se  $u_{11} = 0$  então escreva “fatoração impossível” e pare.

**Passo 3:** Para  $i = 2, \dots, n$ , faça  $l_{i1} \leftarrow \frac{a_{i1}}{u_{11}}$ .



**Passo 4:** Para  $i = 2, \dots, n - 1$ , execute os passos 5 a 6:

**Passo 5:** Faça  $u_{ij} \leftarrow a_{ij} - \sum_{k=1}^i l_{ik} u_{ki}$ . Se  $u_{ij} = 0$  então escreva “fatoração impossível” e pare.

**Passo 6:** Para  $j = i + 1, \dots, n$ , execute os passos 7 a 8:

**Passo 7:** Faça  $u_{ij} \leftarrow \frac{1}{l_{ij}} (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj})$ .

**Passo 8:** Faça  $l_{ji} \leftarrow \frac{1}{u_{ji}} (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki})$ .

**Passo 9:** Faça  $u_{nn} \leftarrow a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} u_{kn}$ .

**Passo 10:** Devolva  $L$  e  $U$  e pare.

# Resolução do sistema linear

Uma vez computada a fatoração da matriz  $A = LU$ , a solução do sistema linear  $Ax = b$  pode ser obtida resolvendo os sistemas  $Ly = b$  e  $Ux = y$ .

Como a matriz  $L$  é triangular inferior, temos que

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

e, para cada  $i = 2, \dots, n$ ,

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right).$$

# Resolução do sistema linear

Depois de calculado o valor de  $y$ , encontramos o valor de  $x$ , resolvendo o sistema  $Ux = y$ .

Como a matriz  $U$  é triangular superior, calculamos

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$$

e, para  $i = n - 1, \dots, 1$ ,

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left( y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right).$$

A **fatoração  $LU$**  definida anteriormente parte do princípio que não serão necessárias trocas de linhas para a aplicação do Método de eliminação de Gauss.

No entanto, este nem sempre é o caso.

Para descrever quais alterações devem ser feitas no algoritmo da **fatoração  $LU$**  para abranger os casos em que trocas de linhas são necessárias, vamos definir o que é uma matriz de permutação.

Uma matriz de permutação  $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$  é obtida a partir da reorganização das linhas da matriz identidade  $I_n$ .

Isso resulta em uma matriz com exatamente um elemento unitário em cada linha e em cada coluna, com o restante dos elementos nulos.

A matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz de permutação  $3 \times 3$ .

## Permutação - exemplo

Se multiplicarmos qualquer matriz  $A \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ , à **esquerda**, por  $P$ , obtemos uma nova matriz que é igual à matriz  $A$ , **trocando-se** a segunda e terceira **linhas**:

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

## Permutação - exemplo

Analogamente, se multiplicarmos qualquer matriz  $A \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ , à **direita**, por  $P$ , obtemos uma nova matriz que é igual à matriz  $A$ , **trocando-se** a segunda e terceira **colunas**:

$$AP = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix}.$$



Há duas propriedades importantes sobre matrizes de permutação que se relacionam ao Método de eliminação de Gauss.

Suponha que  $k_1, k_2, \dots, k_n$  seja uma permutação dos números inteiros  $1, 2, \dots, n$  e que a matriz de permutação  $P$  seja definida por

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k_i, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então,

- $PA$  permuta as linhas de  $A$ . Isto é,

$$PA = \begin{pmatrix} a_{k_1 1} & a_{k_1 2} & \dots & a_{k_1 n} \\ a_{k_2 1} & a_{k_2 2} & \dots & a_{k_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k_n 1} & a_{k_n 2} & \dots & a_{k_n n} \end{pmatrix}.$$

- $P^{-1}$  existe e  $P^{-1} = P^T$ .

Como vimos anteriormente, para qualquer matriz  $A$  não-singular, o sistema linear  $Ax = b$  pode ser resolvido usando o Método de eliminação de Gauss com possibilidade de pivotamento.

Se soubéssemos, de antemão, quais as permutações necessárias para que o Método de eliminação de Gauss fosse aplicado, poderíamos aplicar estas permutações à matriz  $A$  e, depois, aplicar o Método de eliminação de Gauss sem permutações.

# Permutação e fatoração $LU$

Ou seja, quando  $A$  é não-singular, sempre é possível aplicar uma permutação  $P$ , obtendo  $PA$  tal que é possível aplicar o Método de eliminação de Gauss sem trocas de linhas para resolver o sistema  $PAx = Pb$ .

Isso significa que, quando  $A$  é não-singular, é possível calcular  $PA = LU$ .

Como  $P^{-1} = P^T$ , temos que

$$A = P^{-1}LU = P^T LU = (P^T L)U.$$

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como  $a_{11} = 0$ , não é possível calcular a fatoração  $LU$  de  $A$ .

# Permutação e fatoração $LU$ - exemplo

No entanto, se fizermos a troca  $(E_1) \leftrightarrow (E_2)$ , podemos executar as operações  $(E_3 + E_1) \rightarrow (E_3)$  e  $(E_4 - E_1) \rightarrow (E_4)$ , obtendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Permutação e fatoração $LU$ - exemplo

Depois, trocamos  $(E_3) \leftrightarrow (E_4)$  e executamos a operação  $(E_3 - E_2) \rightarrow (E_3)$ , obtendo

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

# Permutação e fatoração $LU$ - exemplo

A matriz de permutação associada às trocas de linhas  $(E_1) \leftrightarrow (E_2)$  e  $(E_3) \leftrightarrow (E_4)$  é

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



# Permutação e fatoração $LU$ - exemplo

O Método de eliminação de Gauss sem trocas de linhas pode ser aplicado à matriz  $PA$ , fornecendo

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = LU.$$

Logo,

$$A = P^{-1}LU = P^T LU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$