Integração Numérica

Marina Andretta/Franklina Toledo

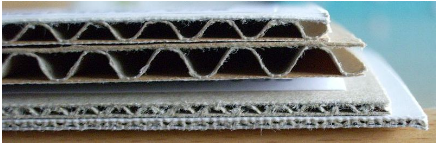
ICMC-USP

24 de outubro de 2012

Baseado nos livros: a) Burden e Faires, b) Franco; c) Arenales e Darezzo

Um exemplo: inspirado em Burden e Faires, 2003

Existe um tipo de papelão que é formado por três camadas de papel. As duas camadas externas são de papelão liso, enquanto que a camada interna é formada por papelão ondulado. Este tipo de papelão é ilustrado na figura abaixo.



Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Papelão

Um exemplo: inspirado em Burden e Faires, 2003

Suponha que queremos obter uma folha de papelão de 4 metros de comprimento. A altura de cada onda do papel ondulado é de 1 cm, a partir de seu centro, e cada onda tem um período de aproximadamente 2π cm.

O problema de se encontrar o comprimento da folha ondulada necessária para obter este papelão, consiste em determinar o comprimento da curva dada por $f(x) = \sin(x)$ a partir de $x = 0$ polegada até $x = 400$ centímetros. Do cálculo, sabemos que esse comprimento é dado por:

$$L = \int_0^{400} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^{400} \sqrt{1 + (\cos(x))^2} dx$$

O que reduz o problema, ao cálculo desta integral!

Um exemplo: inspirado em Burden e Faires, 2003

O cálculo desse comprimento envolve uma integral elíptica de 2a. ordem, que não pode ser calculada pelos métodos ordinários. Nesta aula, veremos alguns métodos numéricos para obter uma solução aproximada para problemas deste tipo.

Nesta aula vamos estudar métodos numéricos para calcular aproximadamente a integral de uma função com uma variável real definida num intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx$$

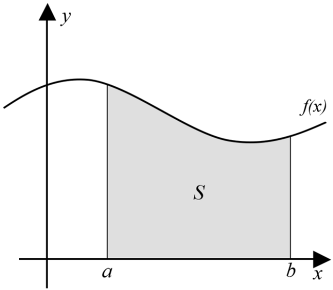
em que $f(x)$ é contínua com derivadas contínuas em $[a, b]$.

Quando é possível determinar a função primitiva $F(x)$ de $f(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$, o valor da integral é dado por:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

.

Graficamente: considerando $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$ podemos relacionar a integral com a área A, como ilustrado na figura a seguir.



Fonte: pt.wikipedia.org

As técnicas de integração numérica são utilizadas para calcular uma integral definida $f(x)$, em especial, quando:

- $f(x)$ é conhecida apenas em pontos discretos obtidos através de experimentos;
- $f(x)$ não tem integral explícita ou sua integral não é simples de obter.

A ideia básica da integração numérica é aproximar a função $f(x)$ pela soma de um conjunto de funções, ou seja, o método de **quadratura numérica** que utiliza o seguinte somatório:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

Estas funções podem ser dadas pelo polinômio interpolador da função $f(x)$, em pontos equidistantes do intervalo $[a, b]$, ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

em que $P_n(x)$ é o polinômio interpolador.

Este processo é conhecido como **fórmulas de quadratura de Newton-Cotes**.

Existem outras fórmulas de aproximação para o cálculo da integral de $f(x)$ conhecidas como **fórmulas de quadratura de Gauss**.

Considere uma função $f(x)$ definida em $x_0, x_1, ..., x_n$, $n+1$ pontos distintos e equidistantes do intervalo $[a, b]$, ou seja,

$$x_{i+1} - x_i = h$$

para $i = 0, 1, 2, ...n-1$, em que h $(h > 0)$ é a distância entre dois pontos consecutivos.

Para $x_0 = a$ e $x_n = b$ temos as **fórmulas fechadas de Newton-Cotes**.

Seja $P_n(x)$ o polinômio interpolador de $f(x)$, sabemos das aulas passadas que:

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

em que

$$E_n(x) = (x - x_0)...(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

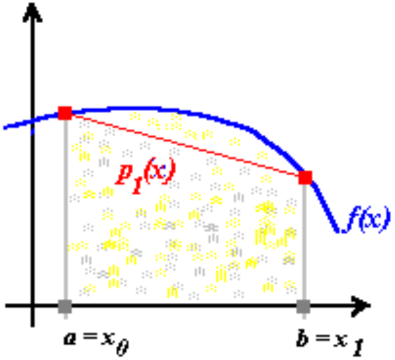
com $x_0 \leq \xi \leq x_n$.

Podemos, portanto, aproximar o cálculo da integral de $f(x)$ por:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_n} P_n(x)dx$$

com o erro dado por:

$$\int_{x_0}^{x_n} E_n(x)dx$$



Fonte: www.math.ist.utl.pt

Regra do Trapézio

Para a regra do trapézio tomamos $x_0 = a$ e $x_1 = b$, logo $h = a - b$ e o polinômio de lagrange:

$$P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$

Temos, portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)\right)dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1)dx$$

Como $(x - x_0)(x - x_1)$ não mudam de sinal em $[x_0, x_1]$, o Teorema do Valor Médio Ponderado para Integrais pode ser aplicado ao termo de erro, e obtemos para qualquer $\xi \in [x_0, x_1]$:

$$\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1)dx = f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)dx$$

$$= f''(\xi)[x^3 - \frac{(x_1 + x_0)}{2}x^2 + x_0 x_1 x]|_{x_0}^{x_1}$$

$$= -\frac{h^3}{6} f''(\xi)$$

Logo,

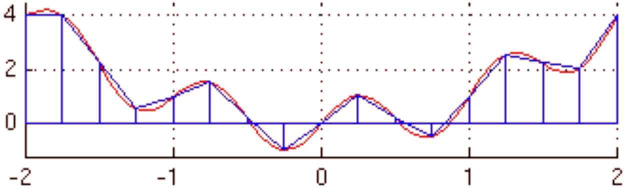
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)\right) dx - \frac{h^3}{6} f''(\xi)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1) dx - \frac{h^3}{6} f''(\xi)$$

$$= \frac{(x_1 - x_0)}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{6} f''(\xi)$$

$$= \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{6} f''(\xi)$$

Regra do Trapézio Generalizada



Fonte: wiki

Regra dos Trapézios Generalizada (repetida)

Subdividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais, cada qual de amplitude $h = (x_n - x_0)/n$, em que $x_0 = a$ e $x_n = b$.
Aplicamos a regra do trapézio em casa um dos subintervalos, ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + ... + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Regra 1/3 de Simpson

Subdividimos o intervalo $[a, b]$ em 2 subintervalos iguais, em que x_0, x_1 e x_2 são equidistantes. Aproximamos a integral de $f(x)$ pelo polinômio interpolador de Newton-Gregory de grau 2:

$$P_2(x) = \delta^0 f(x_0) + (x - x_0)\frac{\delta^1 f(x_0)}{1!h^1} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\delta^2 f(x_0)}{2!h^2}$$

Assim:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Regra 1/3 de Simpson

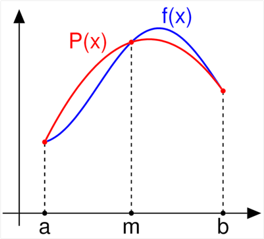
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Erro:

$$E_2 = -\frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{90}$$

com $x_0 \leq \xi \leq x_2$

Regra 1/3 Simpson



Fonte: slides Renato M. Assunção - DCC - UFMG

Fórmula de Quadratura de Gauss

As aproximações que vimos até agora, estão baseadas em pontos igualmente espaçados.

Uma maneira alternativa de calcular integrais de forma aproximada é utilizar a fórmula de quadratura de Gauss.

Como definido em Burden e Faires (2003):

"A quadratura gaussiana escolhe os pontos para se calcular a aproximação em uma maneira ótima, em vez de considerar apeans os pontos igualmente espaçados. Os pontos $x_1, x_2 ... x_n$ pertencentes ao intervalo $[a, b]$ e os coeficientes $c_1, c_2, ..., c_n$ são escolhidos de modo a minimizar o erro esperado no cálculo da aproximação:"

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i).$$

A exatidão do resultado depende da escolha adequada dos parâmetros: c_i e x_i, para $i = 1, 2, ..., n$.

Exemplo: $n = 2$, $a = -1$ e $b = 1$, suponha que queremos determinar c_1, c_2, x_1 e x_2 de maneira que a fórmula:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2).$$

dê um resultado exato sempre que $f(x)$ seja um polinômio de grau 2 x 2 -1 = 3 ou menor, ou seja, quando

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

para quaisquer conjunto de constatnes a_0, a_1, a_2 e a_3.

Sabemos que:

$$\int (a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)dx = a_0 \int 1dx + a_1 \int xdx + a_2 \int x^2dx + a_3 \int x^3dx$$

isto equivale a mostramos que a fórmula dá resultados exatos para $f(x)$ igual a $1, x, x^2$ e x^3.
Para $f(x) = 1$ temos que:

$$\int dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$\int_{-1}^{1} dx = c_1(1) + c_2(1)$$

$$c_1 + c_2 = 2$$

Fórmula de Quadratura de Gauss

Para $f(x) = x$ temos que:

$$\int xdx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$\int_{-1}^{1} xdx = c_1(x_1) + c_2(x_1)$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$$

Para $f(x) = x^2$ temos que:

$$\int x^2 dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = c_1(x_1^2) + c_2(x_1^2)$$

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3}$$

Fórmula de Quadratura de Gauss

Para $f(x) = x^3$ temos que:

$$\int x^3 dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = c_1(x_1^3) + c_2(x_1^3)$$

$$c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0$$

A solução desse sistema é dada por:

$$c_1 = 1, c_2 = 1, x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Fórmula de Quadratura de Gauss

O que resulta na fórmula de aproximação:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2).$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}).$$

que para todo polinômio de grau 3 ou menor dá o resultado exato.