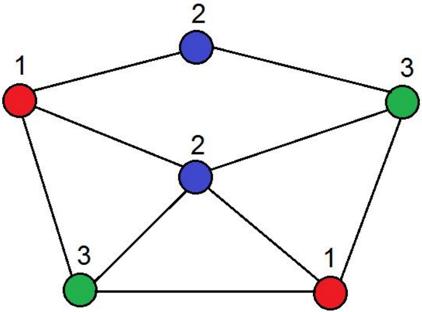
Algoritmo de aproximação para Coloração de Soma Mínima em grafos

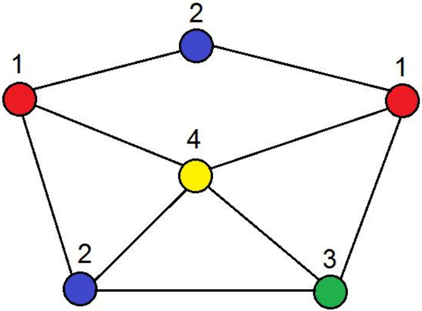
Eduardo Delcides Bernardes
Isis Fernanda Mascarin
Pedro Belin Castellucci

Tópicos de Otimização Combinatória (SME 0216)
Tópicos em Otimização (SME 5826)
Professora reponsável: Marina Andretta

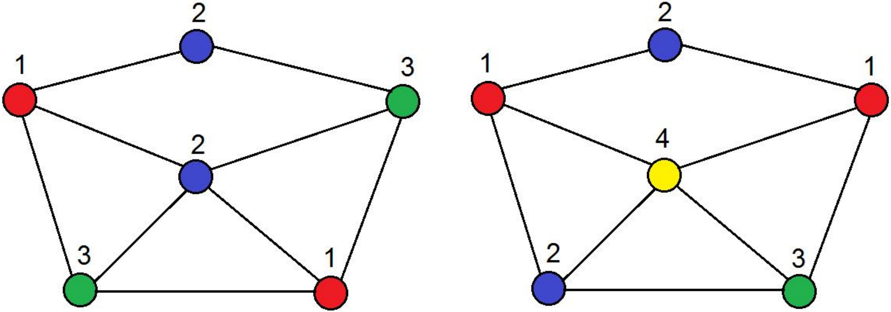
02 de dezembro de 2015

Coloração





Coloração



Dado um grafo $G = (V, E)$ e um $k \in \mathbb{N}^*$. Define-se como uma coloração de vértices de G a função $c : V \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, $\{u, v\} \in E$ e $c(u) \neq c(v)$.

Problema clássico de coloração.

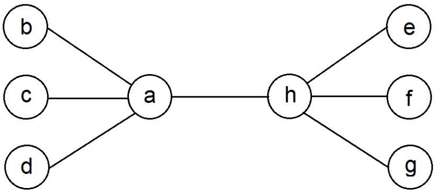
Consiste em encontrar o menor k tal que um determinado grafo seja k-colorível.

Aplicações.

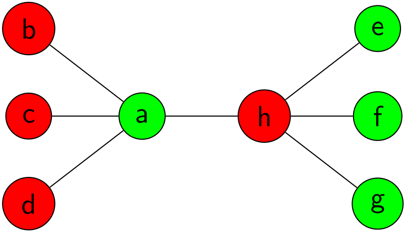
- Programação de horários.
- Escalonamento (*Scheduling*).
- Alocação de frequência de emissoras de rádio.
- Coloração de mapas

Exemplo:

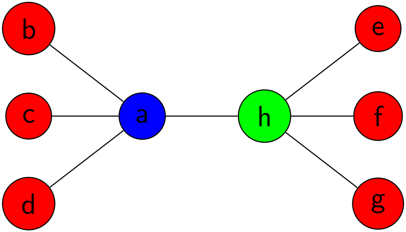
- Tarefas: a, b, c, d, e, f, g e h.
- Não podem ser executadas simultaneamente: (b,a); (c,a); (d,a); (a,h); (h,e); (h,f) e (h,g).
- Cada tarefa tem um custo proporcional ao momento da execução.



Possíveis soluções para o exemplo:



$$4.(1) + 4.(2) = 12$$



$$6.(1) + 2 + 3 = 11$$

Dada uma k-coloração de um grafo $G(V, A)$.

Soma de uma coloração:

$$\sum_{v \in V} c(v)$$

Soma cromática:

$$\sum(G) = min\{\sum_k(G); k \in \mathbb{N}^* \text{ e } G \text{ é } k\text{-colorível}\}$$

Problema de Coloração de Soma Mínima

Versão de decisão: dado um grafo G e um número inteiro positivo $\mathbb{S}$. Existe uma coloração de G cuja soma não ultrapassa $\mathbb{S}$?

Versão de otimização: dado um grafo G, determinar o menor $\mathbb{S}$ tal que existe uma k-coloração cuja soma é $\mathbb{S}$.

Coloração de Soma Mínima
está em NP-completo.

Coloração de Soma Mínima
está em NP-completo.

Está em NP.

Redução de um
problema em NP-completo.

Coloração de Soma Mínima
está em NP-completo.

Está em NP.

Redução de um
problema em NP-completo.

3-SAT.

$\downarrow$

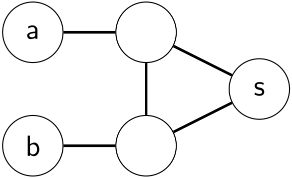
K-coloração.

$\downarrow$

Coloração
de Soma Mínima.

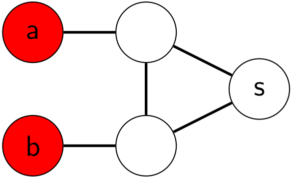
3-SAT para k-coloração

Cores = { T, F, B }



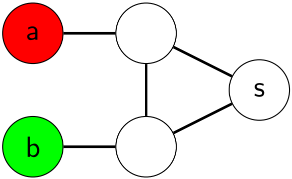
3-SAT para k-coloração

Cores = { T, F, B }



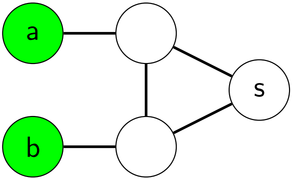
3-SAT para k-coloração

Cores = { T, F, B }



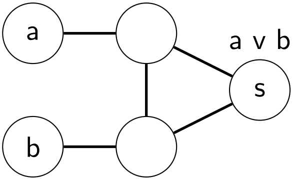
3-SAT para k-coloração

Cores = { T, F, B }



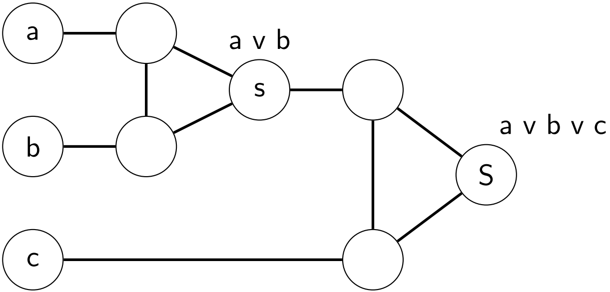
3-SAT para k-coloração

Cores = { T, F, B }

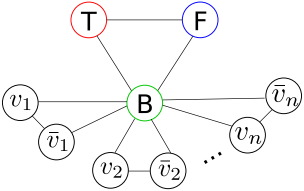


3-SAT para k-coloração

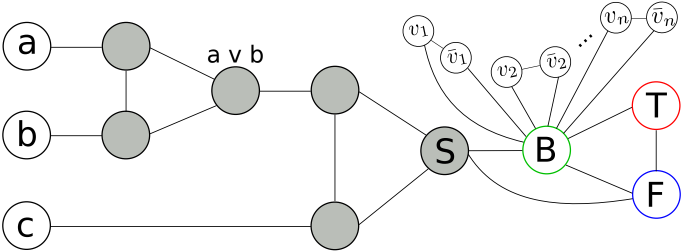
Cores = { T, F, B }



3-SAT para k-coloração

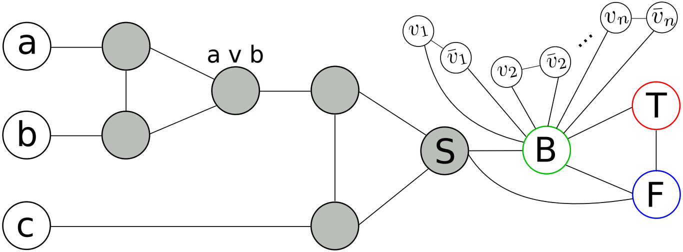


3-SAT para k-coloração



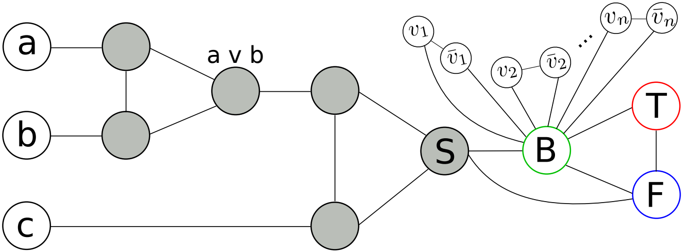
3-SAT para k-coloração

Uma valoração se traduz em uma 3-coloração...



3-SAT para k-coloração

Uma 3-coloração se traduz em uma valoração...



K-coloração para Coloração de Soma Mínima

$G = (V, E)$, k-colorível.

$n = |V|$.

Grafo completo com k vértices.

$$G' = G \times K^k$$

K-coloração para Coloração de Soma Mínima

$G' = G \times K^k$

$V(G') = \{v_j^i \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}$

$E(G') = \{\{v_j^i, v_s^r\} \mid (j = s \text{ e } i \neq r) \text{ ou } \{v_j, v_s\} \in G\}$

$v_1^1 \quad \cdots \quad v_n^1 \quad \cdots \quad v_1^i \quad \cdots \quad v_n^i \quad \cdots \quad v_1^k \quad \cdots \quad v_n^k$

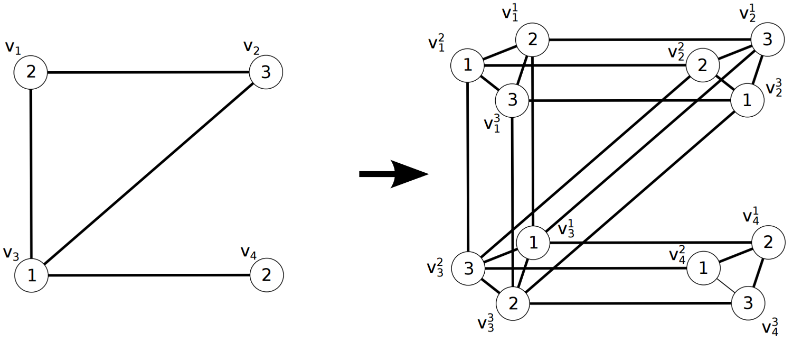
K-coloração para Coloração de Soma Mínima

$G' = G \times K^k$

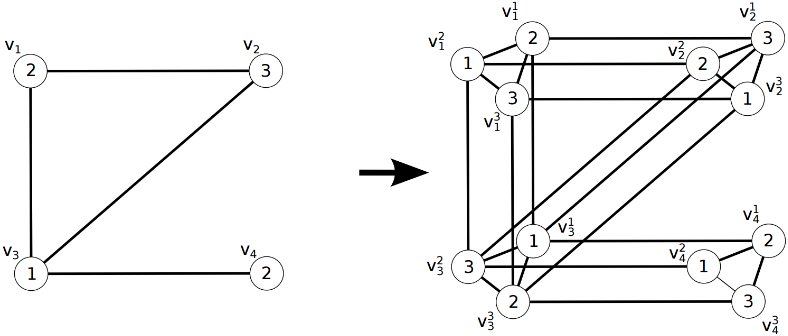
$$V(G') = \{v_j^i \quad | \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}$$

$$E(G') = \{\{v_j^i, v_s^r\} \quad | \quad (j = s \text{ e } i \neq r) \text{ ou } \{v_j, v_s\} \in G\}$$

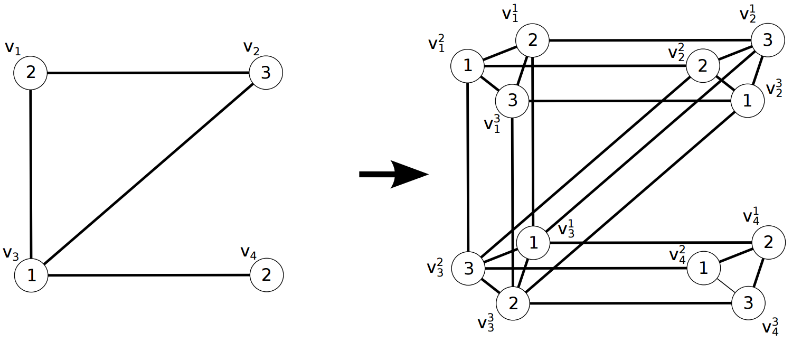
$$v_1^1 \quad \cdots \quad v_n^1 \quad \cdots \quad v_1^i \quad \cdots \quad v_n^i \quad \cdots \quad v_1^k \quad \cdots \quad v_n^k$$



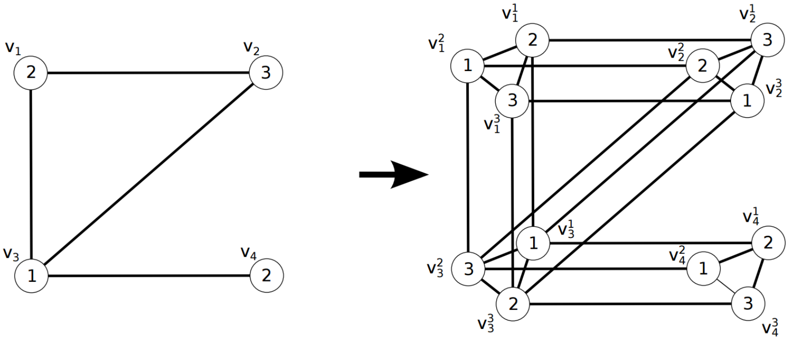
$$k' = ?$$


v_1 2
v_2 3
v_3 1
v_4 2
v_1^1 2
v_1^2 1
v_1^3 3
v_2^1 3
v_2^2 2
v_2^3 1
v_3^1 1
v_3^2 3
v_3^3 2
v_4^1 2
v_4^2 1
v_4^3 3

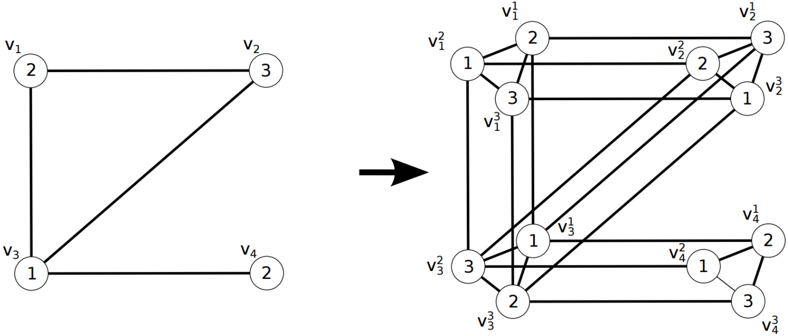
$$k' = n^{\frac{k(k+1)}{2}}$$



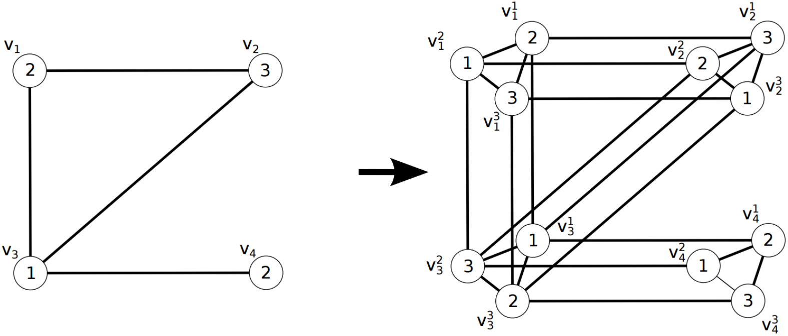
Supondo que G tem uma k-coloração...



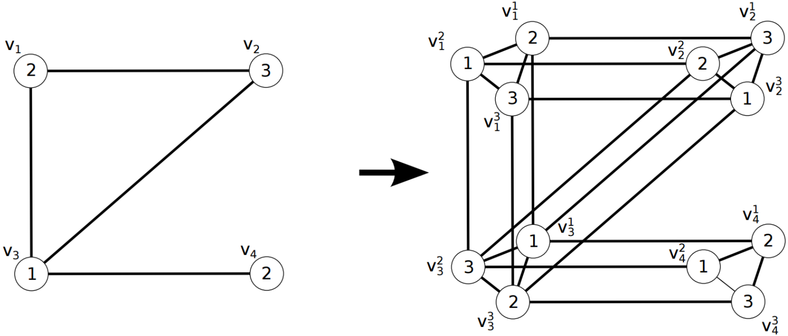
Cada cópia de G é colorida com as cores deslocadas de maneira circular.



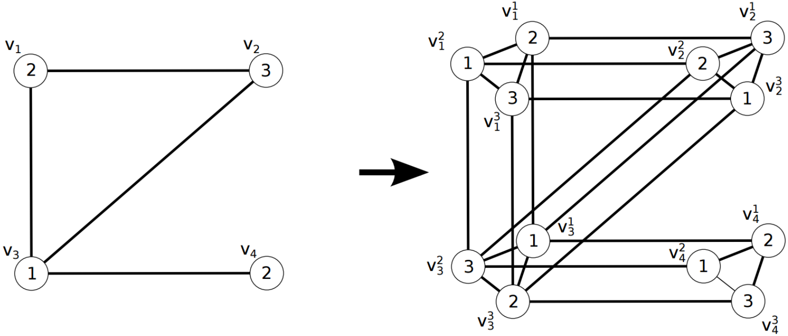
Cada cópia de G tem uma k-coloração.



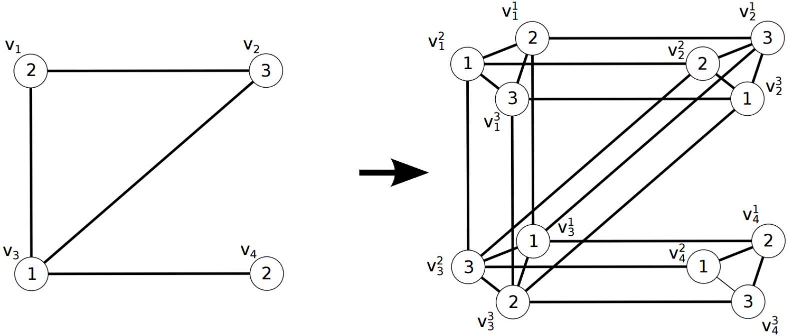
Cada cópia de K^k tem um vértice com cada cor de $\{1, \ldots, k\}$.



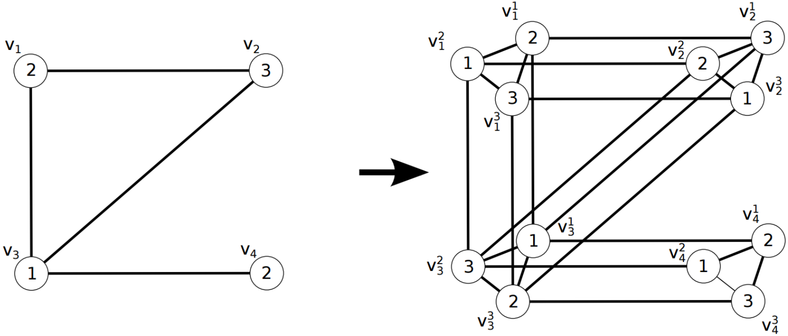
n cópias de $K^k \Rightarrow G'$ tem k-coloração com soma $k' = n\frac{k(k+1)}{2}$.



Supondo que G' tem uma coloração cuja soma não ultrapassa k'...



A menor soma possível para uma cópia de K^k é $\frac{k(k+1)}{2}$.



G' é k-colorível $\Rightarrow$ G também é.

Coloração de Soma Mínima
está em NP-completo.

Está em NP.

Redução de um
problema em NP-completo.

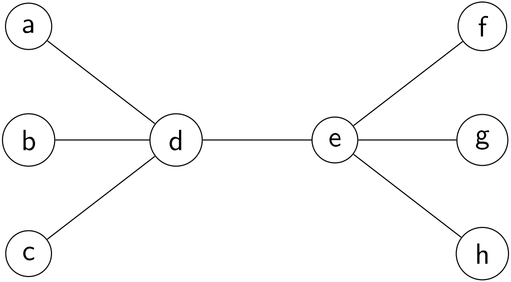
$$\begin{array}{c} \text{3-SAT.} \\ \downarrow \\ \text{K-coloração.} \\ \downarrow \\ \text{Coloração} \\ \text{de Soma Mínima.} \end{array}$$

Algoritmo guloso

G: grafo cujos vértices serão coloridos;
$V \leftarrow (v_1, ..., v_n)$: ordem em que os vértices serão coloridos;
$C \leftarrow \{1, \ldots, k\}$: conjunto de cores disponíveis;
for $v_i \in V$ **do**
    N_i^C: cores utilizadas pelos vizinhos já coloridos de v_i;
    c: menor cor que não pertence a N_i^C;
    $v_i \leftarrow c$
end

Note que o algoritmo produz, de fato, uma k-coloração, e tem complexidade $O(n\Delta)$.

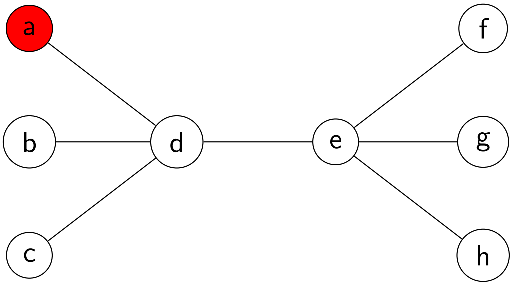
Cores = { 1, 2, 3, 4, 5 }



$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$; $|V| = 8$

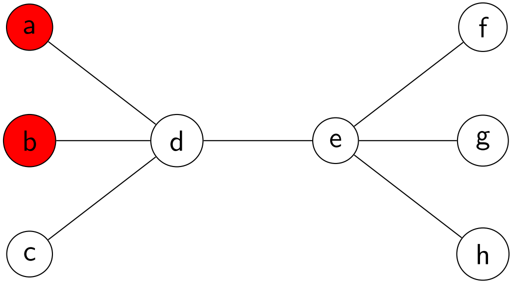
$E = \{\{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{e, g\}, \{e, h\}\}$; $|E| = 7$

Cores = { 1, 2, 3, 4, 5 }



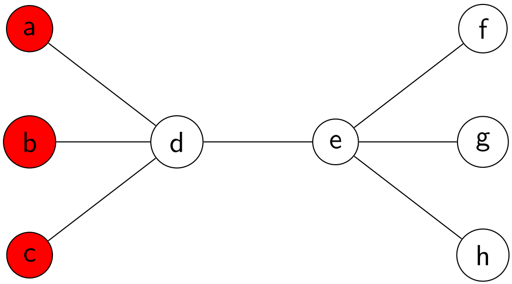
Soma = 1

Cores = { 1, 2, 3, 4, 5 }



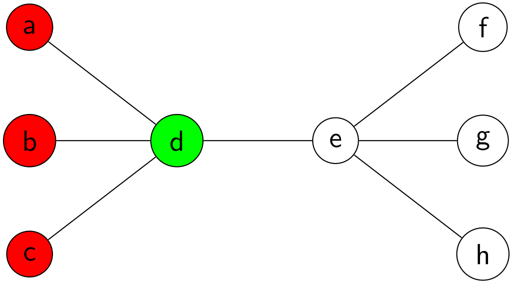
Soma = 1 + 1

Cores = { 1, 2, 3, 4, 5 }



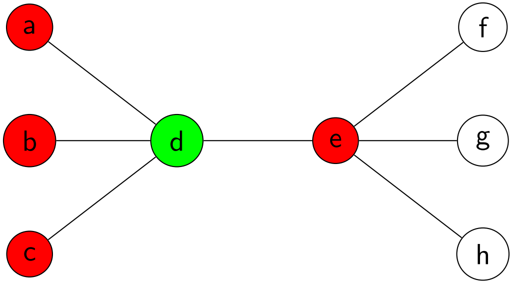
Soma = 1 + 1+ 1

Cores = { 1, 2, 3, 4, 5 }



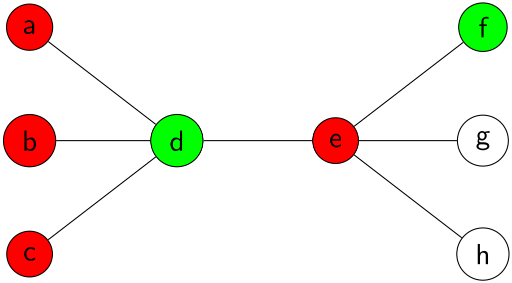
Soma = 1 + 1 + 1 + 2

Cores = { 1, 2, 3, 4, 5 }



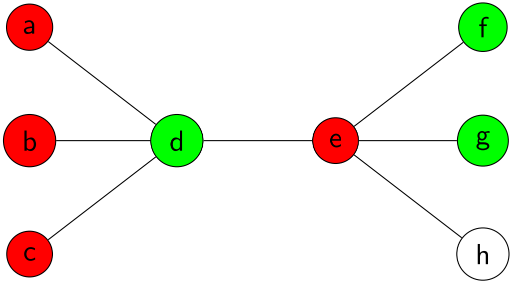
Soma = 1 + 1 + 1 + 2 + 1

Cores = { 1, 2, 3, 4, 5 }



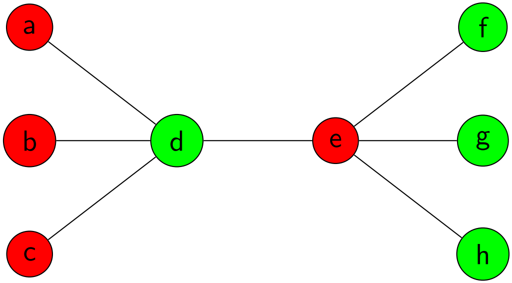
Soma = 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2

Cores = { 1, 2, 3, 4, 5 }



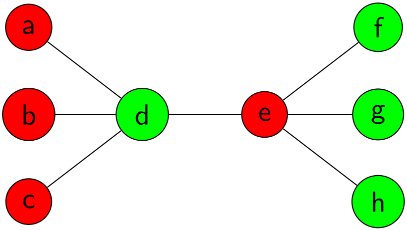
Soma = 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2

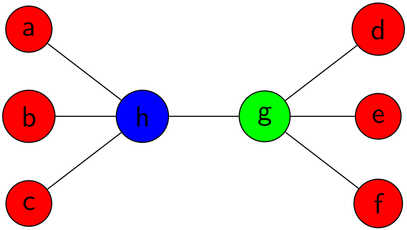
Cores = { 1, 2, 3, 4, 5 }



Soma = 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2 = 12

Cores = { 1, 2, 3, 4, 5 }





$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;
Soma = 12

$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;
Soma = 11

Limites para soma cromática

Seja G um grafo com n vértices e m arestas.

- "Melhor caso": G não tem nenhuma aresta.

$$n \leq \sum(G)$$

- "Pior caso": G é um grafo completo.

$$\sum(G) \leq \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\boxed{n \leq \sum(G) \leq \frac{n(n+1)}{2}}$$

- "Estratégia Gulosa":

  Seja $\rho = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ uma ordenação dos vértices de G

  Seja $l(v_i)$ o número de vértices adjacentes a v_i que estão antes dele em ρ

$$\sum_{i=1}^{n} l(v_i) = l(v_1) + l(v_2) + \cdots + l(v_n) = m$$

Atribuindo a "menor" cor possível a cada vértice na ordem de ρ, obtemos uma coloração tal que:

$$c(v_i) \leq l(v_i) + 1$$

Portanto,

$$\sum(G) \leq \sum_{i=1}^{n} c(v_i) \leq \sum_{i=1}^{n}(1 + l(v_i)) = n + \sum_{i=1}^{n} l(v_i) = n + m.$$

$$\boxed{\sum(G) \leq m + n}$$

Razão de aproximação

Seja G um grafo tal que

$$m \leq \alpha n.$$

$\sum_{i=1}^{n} c(v_i)$: soma associada a uma coloração dada pelo algoritmo.

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} c(v_i) \leq n + m$$

Razão de aproximação

Seja G um grafo tal que

$$m \leq \alpha n.$$

$\sum_{i=1}^{n} c(v_i)$: soma associada a uma coloração dada pelo algoritmo.

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} c(v_i) \leq n + m \leq n + \alpha n = (1 + \alpha) n$$

Razão de aproximação

Seja G um grafo tal que

$$m \leq \alpha n.$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c(v_i)$: soma associada a uma coloração dada pelo algoritmo.

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} c(v_i) \leq n + m \leq n + \alpha n = (1+\alpha)n \leq (1+\alpha)\sum(G)$$

Portanto, o algoritmo é $(\alpha{+}1)$-aproximativo.

Programação Inteira

Sejam o grafo $G = (V, A)$ e C um conjunto de cores disponíveis para coloração.

$$x_{vj} = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice v é colorido com a cor j;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\text{Min} \quad f(x) = \sum_{v \in V} \sum_{j \in C} j x_{vj} \tag{1}$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in C} x_{vj} = 1, \quad \forall v \in V, \tag{2}$$

$$x_{vj} + x_{wj} \leq 1, \quad \forall j \in C, \quad \forall (v, w) \in A, \tag{3}$$

$$x_{vj} \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in V, \quad \forall j \in C. \tag{4}$$

Comparações

Qualidade da solução.

Tempo de execução.

GLPK e Gurobi (1800s e uma *thread*).

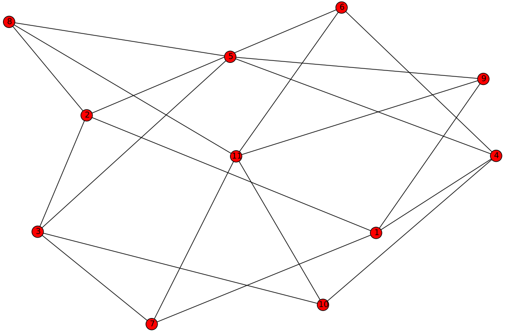
64 instâncias da literatura.

$$\text{Qualidade} = \frac{\text{Solução do algoritmo de aproximação}}{\text{Solução com o Gurobi}}.$$

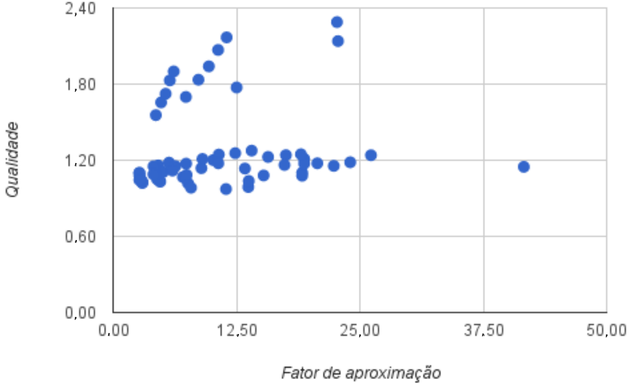
Comparações

	Vértices	**Arestas**	α
Máximo	1406	11395	40,61
Mínimo	11	20	1,66
Médio	258,03	2779,41	9,67

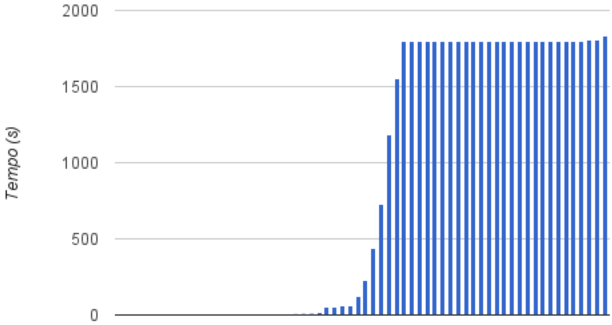
Comparações



Comparações



Comparações



Comparações

		Vértices	Arestas	α
Solução	**GLPK**	0,407	0,833	0,855
	Gurobi	0,635	0,850	0,682
	Aproximação	0,666	0,935	0,712
Tempo	**GLPK**	0,582	0,278	0,278
	Gurobi	0,605	0,705	0,462
	Qualidade	0,130	0,275	0,140

Comparações

	Soluções ótimas	**GAP médio**	**Sem soluções**
Gurobi	37	11,43	0
GLPK	12	40,47	19

Instância	Vértices	Arestas	Grau médio	$\alpha + 1$
2-Insertions_3	37	72	3,89	2,95
3-FullIns_3	80	346	8,65	5,33
3-FullIns_4	405	3524	17,40	9,70
3-Insertions_5	1406	9695	13,79	7,90
myciel3	11	20	3,64	2,82
myciel4	23	71	6,17	4,09
queen15_15	225	5180	46,04	24,02

	Melhor valor			Tempo		
Instância	**(1)**	**(2)**	**(3)**	**(1)**	**(2)**	**(3)**
2-Insertions_3	62	62	64	0,10	0,6	$<$0,1
3-FullIns_3	145	145	250	191,80	0,56	$<$0,1
3-FullIns_4	706	683	1325	TL	724,92	$<$0,1
3-Insertions_5	SS	2421	2381	TL	TL	$<$0,1
myciel3	21	21	22	0,00	0,02	$<$0,1
myciel4	45	45	49	0,30	0,17	$<$0,1
queen15_15	SS	1939	2296	TL	TL	$<$0,1

Conclusões

- No problema de Coloração de Soma Mínima, modela-se situações onde, apesar de eventualmente alguns indivíduos serem penalizados, o sistema como um todo será otimizado.
- A abordagem exata (Programação Inteira) tem certa dificuldade em resolver os problemas até a otimalidade.
- O algoritmo de aproximação (com estratégia gulosa), embora não garanta uma solução ótima, é executado mais rápido. Além disso, a solução do algoritmo de aproximação foi relativamente próxima da melhor solução encontrada pelo método exato.

Obrigado!