Algoritmos de aproximação - Método dual

Marina Andretta

ICMC-USP

20 de outubro de 2015

Baseado no livro Uma introdução sucinta a Algoritmos de Aproximação, de M. H. Carvalho, M. R. Cerioli, R. Dahab, P. Feofiloff, C. G. Fernandes, C. E. Ferreira, K. S. Guimarães, F. K. Miyazawa, J. C. Piña Jr., J. A. R. Soares e Y. Wakabayashi.

Introdução

Vamos ver agora como obter algoritmos de aproximação para um problema de otimização usando o dual de um programa linear que representa o problema em questão.

Esta estratégia de projeto de algoritmos de aproximação é chamada de método dual.

Problema $\textsc{MinCV}$

O problema que vamos usar para apresentar o método é o problema da cobertura mínima por vértices.

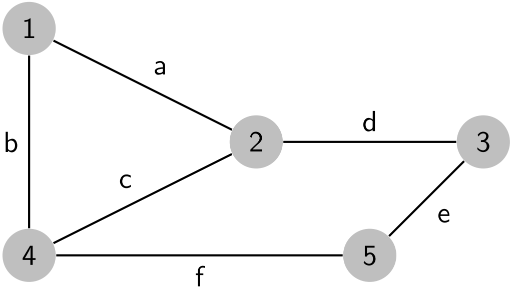
Dado um grafo G, uma cobertura por vértices é um conjunto de vértices com pelo menos um dos extremos de cada aresta.

O problema da cobertura mínima por vértices (*vertex cover problem*) consiste no seguinte:

Problema $\textsc{MinCV}(G, c)$: Dados um grafo G e um custo c_v em $\mathbb{Q}_{\geq}$ para cada vértice v, encontrar uma cobertura por vértices S que minimize $c(S)$.

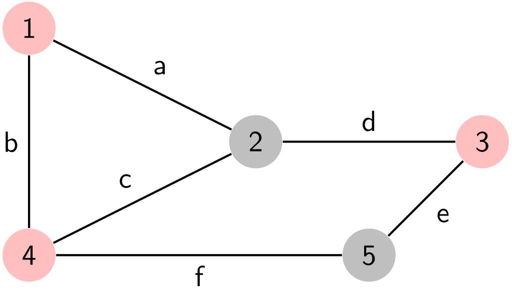
Exemplo

Considere o grafo G dado na figura e custo $c_v = 1$ para os vértices $v \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $c_5 = 5$.



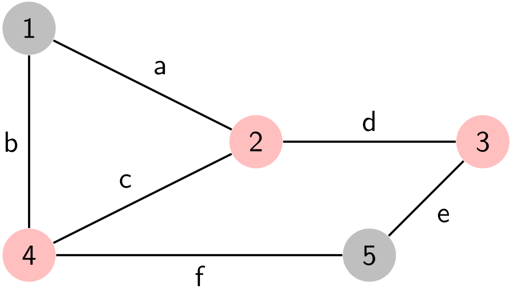
Exemplo

Outra cobertura mínima é $C = \{1, 3, 4\}$, com custo $c(C) = 3$.



Exemplo

Outra cobertura mínima é $C = \{2, 3, 4\}$, com custo $c(C) = 3$.



Problema MinCV

O problema é NP-difícil mesmo quando o grafo é conexo, planar e tem grau máximo 4.

Para este e outros problemas semelhantes, o método dual se aplica de forma simples e direta.

A sua simplicidade não o impede de ser eficaz: o método dual produz o melhor algoritmo de aproximação conhecido para o MinCV.

O método consiste em obter uma solução ótima do dual de uma relaxação linear do problema original e, a partir desta solução, produzir uma resposta para o problema original.

Considere a seguinte relaxação linear do MINCV: encontrar um vetor x indexado por V_G que

$$\begin{array}{lrl} \text{minimize} & cx & \\ \text{sob as restrições} & x_u + x_v \geq 1, & \text{para cada } uv \text{ em } E_G, \\ & x_v \geq 0, & \text{para cada } v \text{ em } V_G. \end{array} \qquad (1)$$

Problema MinCV

O dual deste programa é encontrar um vetor y indexado por E_G que

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & y(E_G) \\
\text{sob as restrições} \quad & y(\delta(v)) \le c_v, \quad \text{para cada } v \text{ em } V_G, \\
& y_e \ge 0, \quad \text{para cada } e \text{ em } E_G.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Exemplo

No caso do exemplo, o programa linear primal é dado por

$$
\begin{array}{lr}
\text{minimizar} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 \\
\text{sob as restrições} & x_1 + x_2 \geq 1, \\
& x_1 + x_4 \geq 1, \\
& x_2 + x_4 \geq 1, \\
& x_2 + x_3 \geq 1, \\
& x_3 + x_5 \geq 1, \\
& x_4 + x_5 \geq 1, \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{array}
$$

Exemplo

E o programa linear dual é dado por

$$
\begin{array}{lr}
\text{maximizar} & y_a + y_b + y_c + y_d + y_e + y_f \\
\text{sob as restrições} & y_a + y_b \leq 1, \\
& y_a + y_c + y_d \leq 1, \\
& y_d + y_e \leq 1, \\
& y_b + y_c + y_f \leq 1, \\
& y_e + y_f \leq 5, \\
& y_a, y_b, y_c, y_d, y_e, y_f \geq 0.
\end{array}
$$

Problema MINCV

O programa linear primal (1) é viável, pois se tomarmos $x_v = 1$ para todo v em V_G todas as restrições são satisfeitas.

O programa linear dual (2) é viável, pois o vetor nulo satisfaz as restrições.

Assim, pelo teorema forte da dualidade, o programa (2) tem solução ótima racional.

Além disso, note que o vetor característico de qualquer cobertura por vértices é viável em (1) e, portanto, temos que

$$opt(G, c) \geq c\hat{x} = \hat{y}(E_G),$$

para qualquer solução ótima $\hat{x}$ de (1) e qualquer solução ótima $\hat{y}$ de (2).

Problema $\textsc{MinCV}$

Uma vez obtida uma solução ótima $\hat{y}$ de (2), para definir uma cobertura de vértice, podemos escolher todos os vértices de G cuja restrição em (2) é satisfeita com igualdade por $\hat{y}$.

As condições de folgas complementares atestam que, para todo v em V_G, $\hat{x}_v = 0$ ou $\hat{y}(\delta(v)) = c_v$. Assim, tomando para a cobertura todo vértice v tal que $\hat{y}(\delta(v)) = c_v$, sabemos que $\hat{x}_v > 0$.

O algoritmo resultante foi proposto por Hochbaum originalmente para o $\textsc{MinCC}$, que generaliza o $\textsc{MinCV}$.

Algoritmo MinCV-Hochbaum

Algoritmo MinCV-Hochbaum(G, c):

seja $\hat{y}$ uma solução ótima racional de (2);

faça $C \leftarrow \{v \in V_G : \hat{y}(\delta(v)) = c_v\}$;

devolva C.

Exemplo

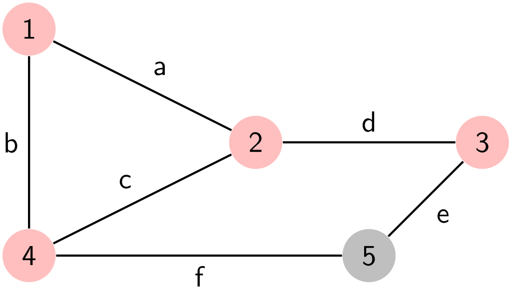
Resolvendo o programa linear dual

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & y_a + y_b + y_c + y_d + y_e + y_f \\
\text{sob as restrições} & y_a + y_b \leq 1, \\
& y_a + y_c + y_d \leq 1, \\
& y_d + y_e \leq 1, \\
& y_b + y_c + y_f \leq 1, \\
& y_e + y_f \leq 5, \\
& y_a, y_b \geq 0, \\
& y_a, y_b, y_c, y_d, y_e, y_f \geq 0,
\end{array}
$$

temos a solução $\hat{y}_a = 1$, $\hat{y}_b = 0$, $\hat{y}_c = 0$, $\hat{y}_d = 0$, $\hat{y}_e = 1$ e $\hat{y}_f = 1$.

Exemplo

Como a única restrição não satisfeita por igualdade é a correspondente ao vértice 5 ($y_e + y_f \leq 5$), temos que a cobertura fornecida pelo algoritmo MinCV-Hochbaum é $C = \{1, 2, 3, 4\}$, com custo $c(C) = 4$.



Teorema 1: O algoritmo MinCV-Hochbaum produz uma cobertura por vértices.

Demonstração: Seja C o conjunto devolvido pelo algoritmo.

Denote por d_v a folga na restrição em (2) que corresponde ao vértice v, ou seja, $d_v := c_v - \hat{y}(\delta(v))$.

Considere uma aresta arbitrária $f = ij$ e seja $\epsilon := \min\{d_i, d_j\}$.

Queremos mostrar que $\epsilon = 0$, o que garante que i ou j será escolhido para a cobertura.

Defina

$$\dot{y}_f := \hat{y}_f + \epsilon$$

e, para toda aresta e de E_G diferente de f,

$$\dot{y}_e := \hat{y}_e.$$

Note que, para v em $\{i, j\}$, temos que

$$\dot{y}(\delta(v)) = \sum_{vu \in E_G} \dot{y}_{vu} = \sum_{vu \in E_G \setminus \{f\}} \dot{y}_{vu} + \dot{y}_f = \sum_{vu \in E_G \setminus \{f\}} \hat{y}_{vu} + \hat{y}_f + \epsilon =$$

$$\hat{y}(\delta(v)) + \epsilon \leq \hat{y}(\delta(v)) + c_v - \hat{y}(\delta(v)) = c_v.$$

Além disso, para $v \notin \{i, j\}$, temos que

$$\dot{y}(\delta(v)) = \sum_{vu \in E_G} \dot{y}_{vu} = \sum_{vu \in E_G} \hat{y}_{vu} = \hat{y}(\delta(v)) \leq c_v.$$

Isso significa que $\dot{y}$ é viável no programa linear dual (2).

Como $\hat{y}$ é uma solução ótima de (2) e

$$\dot{y}(E_G) = \sum_{e \in E_G} \dot{y}_e = \sum_{e \in E_G \setminus \{f\}} \dot{y}_e + \dot{y}_f = \sum_{e \in E_G} \hat{y}_e + \hat{y}_f + \epsilon = \hat{y}(E_G) + \epsilon,$$

temos que $\epsilon = 0$.

Ou seja, para toda aresta de ij em E_G, uma das restrições em (2) que correspondem aos vértices i e j não tem folga.

Portanto, C é uma cobertura por vértices.

Teorema 2: O algoritmo MinCV-Hochbaum é uma 2-aproximação polinomial para o MinCV.

Demonstração: Ao final do algoritmo MinCV-Hochbaum, C é tal que

$$c(C) = \sum_{v \in C} c_v = \sum_{v \in C} \hat{y}(\delta(v)).$$

Como, para cada aresta $e = ij$, a variável $\hat{y}_e$ aparece no máximo duas vezes na soma (uma vez se i está em C e outra se j está em C), temos

$$c(C) \leq 2\hat{y}(E_G) \leq 2opt(G, c).$$

Algoritmo MinCV-Hochbaum

O programa linear dual (2) tem $|E_G|$ variáveis e $|V_G|$ restrições.

Assim, a linha 1 do algoritmo MinCV-Hochbaum pode ser executada em tempo polinomial em $\langle G \rangle + \langle c \rangle$.

Claramente os demais passos do algoritmo podem ser executados em tempo polinomial em $\langle G \rangle + \langle c \rangle$.

Podemos então concluir que o MinCV-Hochbaum é polinomial.

A melhor razão de aproximação conhecida para o MinCV é 2, ou seja, não se conhece um algoritmo para o MinCV melhor, em termos de razão de aproximação, que o MinCV-Hochbaum.