Problemas NP-completos

Marina Andretta

ICMC-USP

15 de setembro de 2015

SAT é *NP-completo*

Já vimos que o primeiro problema que se demonstrou (por Cook e Levin) ser *NP-completo* é o problema da satisfatibilidade (*satisfiability problem*), denotado por SAT.

Problema SAT(C): Dada uma coleção C de cláusulas booleanas, existe uma valoração que satisfaz todas as cláusulas em C?

Para isso, mostrou-se que todo problema em *NP* pode ser reduzido ao SAT.

Problema 3SAT

Vamos mostrar que o 3SAT, um caso particular do próprio SAT, também é *NP-completo*.

Problema 3SAT(C): Dada uma coleção C de cláusulas booleanas, cada uma com no máximo 3 literais, existe uma valoração que satisfaz todas as cláusulas em C?

3SAT é *NP-completo*

O primeiro passo é mostrar que 3SAT está em *NP*.

Note que, para uma dada coleção de cláusulas C, se for dada uma valoração para as variáveis de C, podemos verificar em tempo polinomial no tamanho de C se todas as suas cláusulas são satisfeitas. Ou seja, uma valoração é um certificado polinomial para o 3SAT.

Portanto, 3SAT está em *NP*.

O próximo passo é reduzir um problema *NP-completo* ao 3SAT.
Escolhemos reduzir o SAT ao 3SAT.

Dada uma instância para o SAT, ou seja, uma coleção de cláusulas C, iremos transformá-la em uma instância de 3SAT, ou seja, uma coleção de cláusulas C' em que todas elas têm no máximo 3 literais.

3SAT é *NP-completo*

Lembre-se que um algoritmo para a transformação de C em C' deve ser polinomial no tamanho de C. Além disso, SAT(C) deve ter resposta SIM se, e somente se, 3SAT(C') tiver resposta SIM.

Construímos C' da seguinte maneira: as cláusulas de C que têm no máximo 3 literais fazem parte de C'.

Para cada cláusula de C

$$(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_k)$$

com $k > 3$, acrescentamos a C' as seguintes cláusulas:

$$(x_1 \vee x_2 \vee y_1), (\neg y_1 \vee x_3 \vee y_2), (\neg y_2 \vee x_4 \vee y_3), ..., (\neg y_{k-3} \vee x_{k-1} \vee x_k).$$

Todos os literais de C fazem parte de C'. Para cada cláusula de C com $k > 3$ literais, acrescentamos $2(k-3)$ literais a C'.

Assim, a transformação de C em C' é polinomial no tamanho de C.

Veremos agora que SAT(C) deve ter resposta SIM se, e somente se, 3SAT(C') tiver resposta SIM.

Se SAT(C) tem resposta SIM, temos que todas as cláusulas de C são satisfeitas. Se 3SAT(C') tem resposta SIM, temos que todas as cláusulas de C' são satisfeitas.

Como algumas cláusulas de C também estão em C' , precisamos apenas verificar o que acontece com as cláusulas diferentes.

Se SAT(C) tem resposta SIM, cada cláusula $(x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_k)$, com $k > 3$, é satisfeita. Então ao menos um dos literais x_i é VERDADEIRO.

Desta forma, definindo $y_1, ..., y_{i-2}$ como VERDADEIRO e $y_{i-1}, ..., y_{k-k}$ como FALSO, todas as cláusulas

$$(x_1 \vee x_2 \vee y_1), (\neg y_1 \vee x_3 \vee y_2), (\neg y_2 \vee x_4 \vee y_3), ..., (\neg y_{k-3} \vee x_{k-1} \vee x_k)$$

são satisfeitas.

Por outro lado, se 3SAT(C') tem resposta SIM, todas as cláusula do tipo

$$(x_1 \vee x_2 \vee y_1), (\neg y_1 \vee x_3 \vee y_2), (\neg y_2 \vee x_4 \vee y_3), \ldots, (\neg y_{k-3} \vee x_{k-1} \vee x_k)$$

são satisfeitas. Então, algum dos x_i deve ser satisfeito.

Ou seja, $(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_k)$ também é satisfeita.

Portanto, SAT $\leq_P$ 3SAT. Como 3SAT está em *NP* e SAT é *NP-completo*, temos que 3SAT também é *NP-completo*.

Problema IS

Agora vamos verificar que o problema do conjunto independente (*independent set*), que denotaremos IS, é *NP-completo*.

Problema $\mathrm{IS}(G, k)$: Dado um grafo G e um número natural k, existe um conjunto de k vértices independente (ou seja, sem arestas entre si) em G?

IS é *NP-completo*

O primeiro passo é mostrar que IS está em *NP*.

Note que, dados um grafo G e um número natural k, se for dado um conjunto S de k vértices, podemos verificar em tempo polinomial no tamanho de G se S é um conjunto independente. Ou seja, um conjunto independente de k vértices de G é um certificado polinomial para o IS.

Portanto, IS está em *NP*.

IS é *NP-completo*

O próximo passo é reduzir um problema *NP-completo* ao IS. Escolhemos reduzir o 3SAT ao IS.

Dada uma instância para o 3SAT, ou seja, uma coleção de cláusulas C em que todas elas têm no máximo 3 literais, iremos transformá-la em uma instância de IS, ou seja, um grafo G e um número natural k.

IS é *NP-completo*

Lembre-se que um algoritmo para a transformação de C em G e k deve ser polinomial no tamanho de C. Além disso, $3\text{SAT}(C)$ deve ter resposta SIM se, e somente se, $\text{IS}(G, k)$ tiver resposta SIM.

Primeiramente, definimos k como o número de cláusulas de C.

A cada literal de C, associamos um vértice em G.

IS é *NP-completo*

As arestas de G são definidas da seguinte maneira: a cada cláusula

$$(a \vee b \vee c)$$

de C, associamos as arestas $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ e $\{b, c\}$.

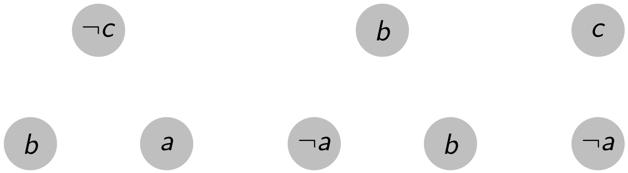
Além disso, sempre que uma variável x e sua negação $\neg x$ aparecem em C, criamos uma aresta $\{x, \neg x\}$.

IS é *NP-completo*

Exemplo: para a coleção de cláusulas

$$\{(a \vee b \vee \neg c), (\neg a \vee b \vee b), (\neg a \vee c)\}$$

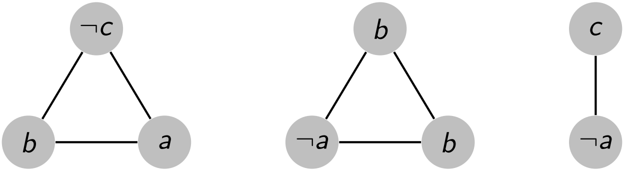
temos $k = 3$ e o grafo G



Exemplo: para a coleção de cláusulas

$$\{(a \vee b \vee \neg c), (\neg a \vee b \vee b), (\neg a \vee c)\}$$

temos $k = 3$ e o grafo G

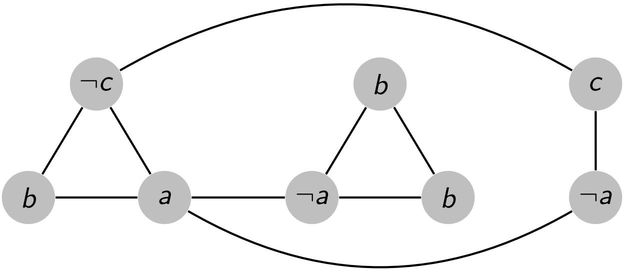


IS é *NP-completo*

Exemplo: para a coleção de cláusulas

$$\{(a \vee b \vee \neg c), (\neg a \vee b \vee b), (\neg a \vee c)\}$$

temos $k = 3$ e o grafo G



O número de vértices de G é igual ao número de literais em C. O número de arestas em G definidas por cada cláusula é, no máximo, o número de literais em C. O número de arestas em G definidas pelas variáveis e suas negações não ultrapassa o número de literais ao quadrado.

Assim, a transformação de C em G e k é polinomial no tamanho de C.

Veremos agora que $3\textsc{Sat}(C)$ deve ter resposta SIM se, e somente se, $\mathrm{IS}(G, k)$ tiver resposta SIM.

IS é *NP-completo*

Se $3\textsc{Sat}(C)$ tem resposta SIM, existe uma valoração que faz com que pelo menos um literal em cada cláusula de C seja VERDADEIRO.

Para cada cláusula de C, considere apenas um literal VERDADEIRO nesta valoração. Seja S o conjunto formado pelos vértices em G associados a estes literais.

Como S contém apenas um vértice associado a um literal de cada cláusula de C, $|S| = k$.

Note também que, para cada par de vértices de S, não há arestas em G. Ou seja, S é um conjunto independente de G de tamanho k.

Portanto, neste caso, $\mathrm{IS}(G, k)$ tem resposta SIM.

IS é *NP-completo*

Exemplo: para a coleção de cláusulas

$$\{(a \vee b \vee \neg c), (\neg a \vee b \vee b), (\neg a \vee c)\},$$

a valoração $a = \text{VERDADEIRO}$, $b = \text{VERDADEIRO}$ e $c = \text{VERDADEIRO}$ satisfaz todas as cláusulas.

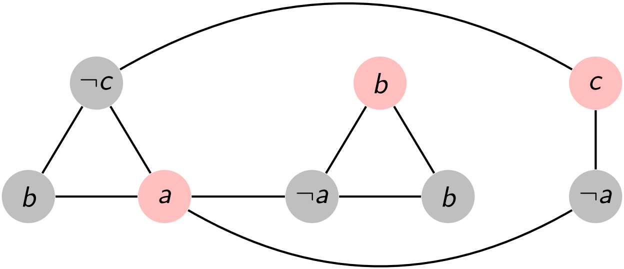
Para esta valoração, os literais verdadeiros são:

$$\{(\color{red}{a} \vee \color{red}{b} \vee \neg c), (\neg a \vee \color{red}{b} \vee \color{red}{b}), (\neg a \vee \color{red}{c})\}.$$

IS é *NP-completo*

Para determinar o conjunto S, precisamos escolher um vértice associado a um literal verdadeiro em cada uma das cláusulas. Por exemplo, S pode ser definido por

$$\{(\color{red}{a} \vee b \vee \neg c), (\neg a \vee \color{red}{b} \vee b), (\neg a \vee \color{red}{c})\}.$$



IS é *NP-completo*

Se $\text{IS}(G, k)$ tem resposta SIM, existe um conjunto independente S de vértices de G de tamanho k.

Considere um vértice v de S e o literal de C associado a v. Se o literal for da forma a, considere $a = \text{VERDADEIRO}$; se o literal for da forma $\neg a$, considere $a = \text{FALSO}$.

Como S é um conjunto independente, não há problema de ter valores contraditórios para uma variável, já que vértices associados a variáveis negadas possuem uma aresta entre si em G.

IS é *NP-completo*

Além disso, como todos os vértices associados a literais de uma mesma cláusula estão ligados, S não possui mais de um vértice associado a uma mesma cláusula.

Como $|S| = k$, temos que a valoração definida satisfaz todas as cláusulas de C.

Portanto, neste caso, $3\textsc{Sat}(C)$ tem resposta SIM.

IS é *NP-completo*

Portanto, $3\textsc{Sat} \leq_P \text{IS}$.

Como IS está em *NP* e 3SAT é *NP-completo*, temos que IS também é *NP-completo*.