Aplicações

Marina Andretta

ICMC-USP

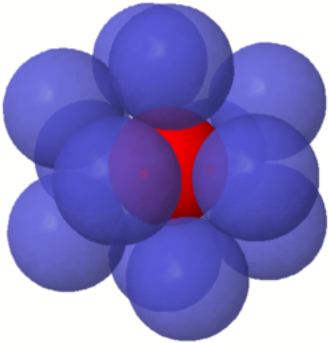
29 de setembro de 2014

Baseado nos problemas presentes em
http://www.ime.usp.br/~egbirgin/TANGO/

Problema *Kissing number*

O *kissing number* é dado pelo número de esferas unitárias em $\boldsymbol{R}^{nd}$ que tocam uma outra esfera unitária em $\boldsymbol{R}^{nd}$.

Este é um problema muito antigo, que vem sendo estudado desde a época de Newton até hoje.



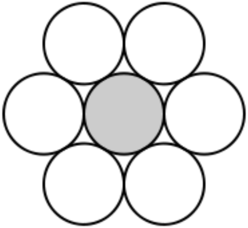
Problema *Kissing number*

Alguns valores e limitantes de *kissing number* conhecidos são:

nd	lim inf	lim sup	*nd*	lim inf	lim sup
1	2	2	13	1154	2069
2	6	6	14	1606	3183
3	12	12	15	2564	4866
4	24	24	16	4320	7355
5	40	44	17	5346	11072
6	72	78	18	7398	16572
7	126	134	19	10688	24812
8	240	240	20	17400	36764
9	306	364	21	27720	54584
10	500	554	22	49896	82340
11	582	870	23	93150	124416
12	840	1357	24	196560	196560

Problema *Kissing number*

Se considerarmos os centros das esferas como p_i, o problema do *kissing number* pode ser reformulado como encontrar np pontos p_i em $\mathbb{R}^{nd}$ distribuidos esfera unitária de $\mathbb{R}^{nd}$ de modo que a distância entre quaisquer dois pontos seja pelo menos 1.



Problema *Kissing number*

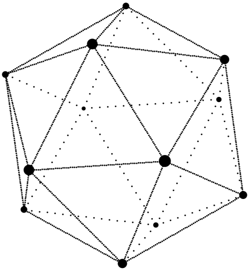
O modelo para este problema pode ser escrito como

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & \alpha & \\ \text{sujeita a} & \|p_i - p_j\| \geq 1, & i,j = 1,...,np,\ i \neq j, \\ & \|p_i\|^2 = 1, & i = 1,...,np, \end{array}$$

onde $\alpha \in \boldsymbol{R}$ é uma constante e $p_i \in \boldsymbol{R}^{nd}$.

Problema *Hard-spheres*

O problema *hard-spheres* consiste em encontrar *np* pontos distribuídos em uma esfera unitária em $\boldsymbol{R}^{nd}$ de modo a maximizar a menor distância entre eles.



Problema *Hard-spheres*

Como todos os pontos são distribuídos na esfera unitária, temos que

$$\boxed{\|p_i\|_2 = 1, \quad i = 1, ..., np.}$$

A distância entre dois pontos i e j é dada por

$$\boxed{\|p_i - p_j\|_2^2 = \|p_i\|^2 + \|p_j\|^2 - 2p_i^T p_j = 2 - 2p_i^T p_j.}$$

Problema *Hard-spheres*

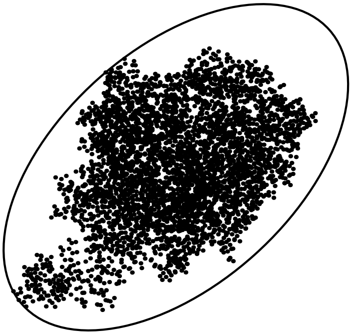
O modelo para este problema pode ser escrito como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z \\ \text{sujeita a} & p_i^T p_j \le z, \quad i, j = 1, ..., np, \ i \neq j, \\ & \|p_i\|^2 = 1, \quad i = 1, ..., np, \end{array}$$

onde $z \in \boldsymbol{R}$ e $p_i \in \boldsymbol{R}^{nd}$.

Problema *Ellipsoid*

O problema *ellipsoid* consiste em, dado um número *np* de pontos em $\mathbb{R}^{nd}$, minimizar o volume do elipsóide centrado na origem que contém todos os pontos p_i.



Problema *Ellipsoid*

Ao aplicarmos uma tranformação linear inversível a uma esfera, obtemos um elipsóide.

Se a transformação linear é escrita como uma matriz simétrica G, seus autovetores são ortogonais e representam as direções dos eixos do elipsóide.

O tamanho dos semi-eixos são dados pelos autovalores. Ou seja, a matriz G é definida positiva.

Problema *Ellipsoid*

Dada a matriz simétrica, definida positiva $G \in \boldsymbol{R}^{nd \times nd}$ e o centro do elipsóide $c \in \boldsymbol{R}^{nd}$, um ponto $p \in \boldsymbol{R}^{nd}$ está contido no elipsóide se

$$\boxed{(p - c)^T G (p - c) \leq 1.}$$

Como estamos interessados no elipsóide centrado na origem, temos que $c = 0$ e queremos que

$$\boxed{p^T G p \leq 1.}$$

Problema *Ellipsoid*

O volume do elipsóide é dado por

$$\boxed{\rho \det(G^{-1/2}),}$$

com ρ volume da bola unitária em $\boldsymbol{R}^{nd}$. Para elipsóides centrados na origem, podemos escrever o volume escalado como

$$\boxed{-\log(\det(G)).}$$

Problema *Ellipsoid*

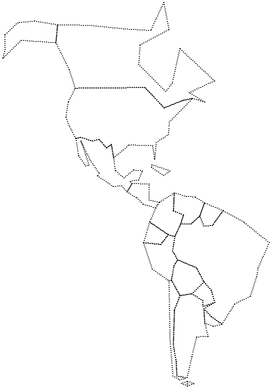
O modelo para este problema pode ser escrito como

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & -\sum_{i=1}^{nd} log(l_{ii}) & \\ \text{sujeita a} & p_i^T L L^T p_i \leq 1, & i = 1, ..., np, \\ & l_{ii} \geq \varepsilon, & i = 1, ..., nd, \end{array}}$$

onde $p_i \in \boldsymbol{R}^{nd}$, L é uma matriz triangular inferior $nd \times nd$ e $\varepsilon > 0$.

Problema *America*

O problema *America* consiste em desenhar o mapa da América no plano, respeitando o formato dos países e mantendo suas áreas proporcionais à área real.



Problema *America*

Suponha que, para cada país j, tenhamos um conjunto de n_j pontos p_i que estão na sua fronteira. Denotaremos por Γ_j uma n_j-upla, $n_j \geq 3$, de inteiros entre 1 e m que representam os índices destes pontos que estão na fronteira do país j.

Suponha que tenhamos também, para cada país j, a sua área real $\beta_j > 0$.

Desejamos encontrar pontos $p_1, ..., p_m \in \boldsymbol{R}^2$ tais que as áreas dos polígonos formados pelos pontos p_i, $i \in \Gamma_j$, está perto de β_j, para todo país j.

Problema *America*

Se um conjunto de localizações prováveis $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_m$ dos pontos $p_1, \ldots, p_m$ é dado, o problema pode ser formulado como

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & \sum_{i=1}^{m} \|p_i - \bar{p}_i\|^2 \\
\text{sujeita a} & 0.99\beta_j \leq \text{área}_j \leq 1.01\beta_j, \quad j = 1, \ldots, nc,
\end{array}
$$

onde

$$
\text{área}_j = \frac{1}{2} \left[(y_1 x_{n_j} - x_1 y_{n_j}) + \sum_{i=1}^{n_j - 1} (y_{i+1} x_i - x_{i+1} y_i) \right]
$$

é a área dada pelos segmentos $p_1 = (x_1, y_1), \ldots, p_{n_j} = (x_{n_j}, y_{n_j})$.

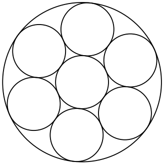
Problema *America*

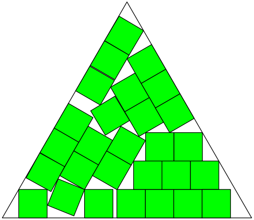
Se $p_1 = (x_1, y_1), ..., p_{n_j} = (x_{n_j}, y_{n_j})$ são os vértices consecutivos de um polígono simples, esta fórmula define a área do polígono.

Para resolver o problema *America*, usamos número de países 17 e número de pontos $np = 132$. As localizações "desejadas" $\bar{p}_1, ..., \bar{p}_{132}$ são dadas pelas coordenadas dos pontos em um mapa padrão da América.

Problemas de empacotamento

Problemas de empacotamento são aqueles em que temos um objeto maior e queremos colocar vários objetos menores dentro do objeto maior, sem que haja sobreposição dos objetos menores.





Problemas de empacotamento

Este tipo de problema é muito importante e muito estudado, já que vários problemas reais podem ser modelados como problemas de empacotamento. Por exemplo:

- Queremos colocar laranjas em uma caixa, de modo a colocar o maior número de laranjas possíveis.
- Queremos armazenar um número fixo colchões em caminhões, de modo a usar o menor número de caminhões possível.
- Dado um número fixo de canos, queremos saber o tamanho da menor caixa possível que permita que os canos possam ser nela armazenados.

Problemas de empacotamento

Vamos nos concentrar nos casos em que temos um objeto maior e queremos colocar vários objetos menores idênticos dentro do objeto maior.

Como visto nos exemplos apresentados, problemas de empacotamento podem ter diferentes objetivos:

- Colocar o maior número possível de objetos menores dentro de um objeto maior de tamanho fixo.
- Encontrar o menor tamanho para o objeto maior que contenha um número fixo dos objetos menores.

Problema de empacotamento de bolas em caixas

No caso em que os objetos menores são bolas em $\boldsymbol{R}^2$ de raio r_i e o objeto maior é uma caixa em $\boldsymbol{R}^2$, com lados d_x e d_y, dois problemas de empacotamento que podem ser formulados são:

1. Encontrar o menor tamanho da caixa $d_x \times d_y$ que contenha um número fixo m de bolas de raio r_i, sem sobreposição.
2. Encontrar o maior número de bolas de raio r_i (e suas posições no plano) que podem ser colocadas sem sobreposição dentro da caixa de tamanho fixo $d_x \times d_y$.

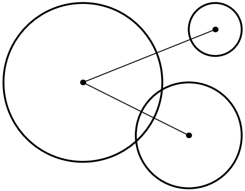
Note que, em ambos os problemas, queremos que as bolas não se sobreponham. Além disso, queremos que todas as bolas estejam dentro da caixa.

Para modelar estas restrições, consideraremos que a caixa tem seu canto inferior esquerdo na origem. Assim, seus vértices são dados por $(0,0)$, $(d_x,0)$, $(0,d_y)$ e (d_x,d_y).

Cada uma das m bolas será representada por seu centro $c^i \in \boldsymbol{R}^2$ e seu raio $r_i \in \boldsymbol{R}$.

Problema de empacotamento de bolas em caixas

Dizer que duas bolas não podem se sobrepor é equivalente a dizer que a distância de quaisquer dois centros c^i e c^j deve ser maior ou igual a $r_i + r_j$.

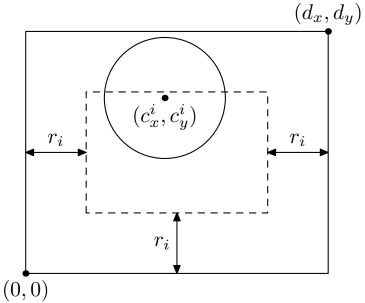


Ou seja,

$$\boxed{\|c^i - c^j\|^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad \forall i, j, \quad i \neq j.}$$

Problema de empacotamento de bolas em caixas

Dizer que as bolas estão dentro da caixa é o mesmo que dizer que, para cada bola i, seu centro está dentro da caixa com vértices em (r_i, r_i), $(d_x - r_i, r_i)$, $(r_i, d_y - r_i)$ e $(d_x - r_i, d_y - r_i)$.



Esta restrição é equivalente a

$$\boxed{\begin{aligned} r_i \leq c_x^i \leq d_x - r_i, \quad \forall i, \\ r_i \leq c_y^i \leq d_y - r_i, \quad \forall i. \end{aligned}}$$

Problema de empacotamento de bolas em caixas

Portanto, o Problema 1, no qual queremos encontrar o menor tamanho da caixa $d_x \times d_y$ que contenha um número fixo m de bolas com raios r_i, sem sobreposição, pode ser modelado da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimizar} & d_x d_y & \\
\text{sujeita a} & \|c^i - c^j\|^2 \geq (r_i + r_j)^2, & i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, i-1, \\
& r_i \leq c_x^i \leq d_x - r_i, & i = 1, \ldots, m, \\
& r_i \leq c_y^i \leq d_y - r_i, & i = 1, \ldots, m, \\
& d_x \geq 0, & \\
& d_y \geq 0, &
\end{array}
$$

com $r_i \in \boldsymbol{R}$, $i = 1, \ldots, m$ dados.

Problema de empacotamento de bolas em caixas

O Problema 2, no qual queremos encontrar o maior número de bolas de raio r_i (e suas posições no plano) que podem ser colocadas sem sobreposição dentro da caixa de tamanho fixo $d_x \times d_y$, pode ser modelado da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimizar} & \alpha & \\
\text{sujeita a} & \|c^i - c^j\|^2 \geq (r_i + r_j)^2, & i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., i-1, \\
 & r_i \leq c_x^i \leq d_x - r_i, & i = 1, ..., m, \\
 & r_i \leq c_y^i \leq d_y - r_i, & i = 1, ..., m,
\end{array}
$$

com $\alpha \in \boldsymbol{R}$ constante, $d_x, d_y \in \boldsymbol{R}$, $r_i \in \boldsymbol{R}$, $i = 1, ..., m$, dados.

Resolvemos este problema para valores fixos crescentes de m.

Se as restrições são satisfeitas, significa que as m bolas escolhidas podem ser empacotadas na caixa.

Problema de empacotamento de bolas em caixas

Note que podemos escrever o modelo apenas com restrições de caixa (mais fácil de resolver). A nova formulação seria

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & \max\{0, (r_i + r_j)^2 - \|c^i - c^j\|^2\}^2 & \\ \text{sujeita a} & r_i \leq c_x^i \leq d_x - r_i, & i = 1, ..., m, \\ & r_i \leq c_y^i \leq d_y - r_i, & i = 1, ..., m, \end{array}}$$

com $d_x, d_y \in \boldsymbol{R}$, $r_i \in \boldsymbol{R}$, $i = 1, ..., m$, dados.

Neste caso, se, para um dado m, a solução obtida tiver valor de função objetivo 0, significa que as m bolas podem ser empacotadas na caixa.

O problema com esta abordagem é que esta função objetivo possui muitos minimizadores locais.

Problema de empacotamento de bolas em bolas

Note que podemos usar as mesmas ideias do empacotamento de bolas em caixas para resolver problemas de empacotamento de bolas em bolas:

1. Encontrar a bola de menor raio R que contenha um número fixo m de bolas de raio r_i, sem sobreposição.
2. Encontrar o maior número de bolas de raio r_i (e suas posições no plano) que podem ser colocadas sem sobreposição dentro da uma bola de raio fixo R.

Problema de empacotamento de bolas em bolas

O que devemos mudar nos modelos de empacotamento de bolas em caixas para que se transformem em modelos para empacotamento de bolas em bolas é como decidir se uma bola de raio r_i está dentro de uma bola maior de raio R.

Para isso, basta pedir que a distância do centro da bola de raio R ao centro da bola de raio r_i seja, no máximo, $R - r_i$.

Problema de empacotamento de bolas em bolas

Vamos supor que bola de raio R está centrada na origem. Neste caso, a restrição pode ser escrita como

$$\boxed{\|c^i\|^2 \leq (R - r_i)^2, \; i = 1, \ldots, m.}$$

Assim, o Problema 1, no qual queremos encontrar a bola de menor raio R que contenha um número fixo m de bolas de raio r_i, sem sobreposição, pode ser modelado da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & R \\ \text{sujeita a} & \|c^i - c^j\|^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, i-1, \\ & \|c^i\|^2 \leq (R - r_i)^2, \qquad\quad i = 1, \ldots, m, \\ & R \geq 0, \end{array}$$

com $r_i \in \boldsymbol{R}$, $i = 1, \ldots, m$, dados.

Problema de empacotamento de bolas em bolas

O Problema 2, no qual queremos encontrar o maior número de bolas de raio r_i (e suas posições no plano) que podem ser colocadas sem sobreposição dentro da uma bola de raio fixo R, pode ser modelado da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \alpha \\ \text{sujeita a} & \|c^i - c^j\|^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., i-1, \\ & \|c^i\|^2 \leq (R - r_i)^2, \quad\quad\quad i = 1, ..., m, \end{array}$$

com $\alpha \in \boldsymbol{R}$ constante, $R \in \boldsymbol{R}$, $r_i \in \boldsymbol{R}$, $i = 1, ..., m$, dados.