

# Aplicações

Marina Andretta

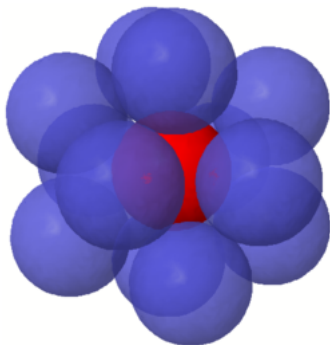
ICMC-USP

18 de outubro de 2010

# Problema *Kissing number*

O *kissing number* é dado pelo número de esferas unitárias em  $\mathbb{R}^{nd}$  que tocam uma outra esfera unitária em  $\mathbb{R}^{nd}$ .

Este é um problema muito antigo, que vem sendo estudado desde a época de Newton até hoje.



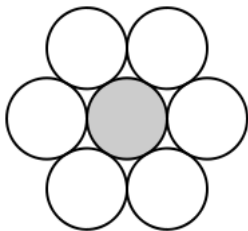
# Problema *Kissing number*

Alguns valores e limitantes de *kissing number* conhecidos são:

<i>nd</i>	lim inf	lim sup	<i>nd</i>	lim inf	lim sup
1	2	2	13	1154	2069
2	6	6	14	1606	3183
3	12	12	15	2564	4866
4	24	24	16	4320	7355
5	40	44	17	5346	11072
6	72	78	18	7398	16572
7	126	134	19	10688	24812
8	240	240	20	17400	36764
9	306	364	21	27720	54584
10	500	554	22	49896	82340
11	582	870	23	93150	124416
12	840	1357	24	196560	196560

# Problema *Kissing number*

Se considerarmos os centros das esferas como  $p_i$ , o problema do *kissing number* pode ser reformulado como encontrar  $np$  pontos  $p_i$  em  $\mathbf{R}^{nd}$  distribuídos esfera unitária de  $\mathbf{R}^{nd}$  de modo que a distância entre quaisquer dois pontos seja pelo menos 1.



# Problema *Kissing number*

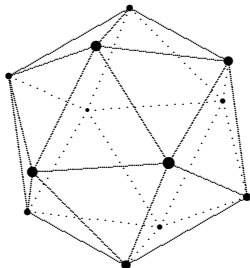
O modelo para este problema pode ser escrito como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \alpha \\ \text{sujeita a} & \|p_i - p_j\| \geq 1, \quad i, j = 1, \dots, np, \quad i \neq j, \\ & \|p_i\|^2 = 1, \quad i = 1, \dots, np, \end{array}$$

onde  $\alpha \in \mathbf{R}$  é uma constante e  $p_i \in \mathbf{R}^{nd}$ .

# Problema *Hard-spheres*

O problema *hard-spheres* consiste em encontrar  $np$  distribuídos em uma esfera unitária em  $\mathbf{R}^{nd}$  de modo a maximizar a menor distância entre eles.



# Problema *Hard-spheres*

Como todos os pontos são distribuídos na esfera unitária, temos que

$$\|p_i\|_2 = 1, \quad i = 1, \dots, np.$$

A distância entre dois pontos  $i$  e  $j$  é dada por

$$\|p_i - p_j\|_2^2 = \|p_i\|^2 + \|p_j\|^2 - 2p_i^T p_j = 2 - 2p_i^T p_j.$$

# Problema *Hard-spheres*

O modelo para este problema pode ser escrito como

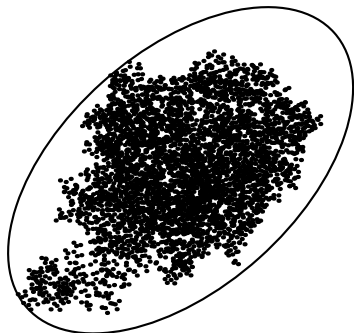
$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z \\ \text{sujeita a} & p_i^T p_j \leq z, \quad i, j = 1, \dots, np, \quad i \neq j, \\ & \|p_i\|^2 = 1, \quad i = 1, \dots, np, \end{array}$$

onde  $z \in \mathbf{R}$  e  $p_i \in \mathbf{R}^{nd}$ .



# Problema *Ellipsoid*

O problema *ellipsoid* consiste em, dado um número  $np$  de pontos em  $\mathbf{R}^{nd}$ , minimizar o volume do elipsóide centrado na origem que contém todos os pontos  $p_i$ .



Ao aplicarmos uma transformação linear inversível a uma esfera, obtemos um elipsóide.

Se a transformação linear é escrita como uma matriz simétrica  $G$ , seus **autovetores** são ortogonais e representam as **direções dos eixos do elipsóide**.

O **tamanho dos semi-eixos** são dados pelos **autovalores**. Ou seja, a matriz  $G$  é definida positiva.

# Problema *Ellipsoid*

Dada a matriz simétrica, definida positiva  $G \in \mathbf{R}^{nd \times nd}$  e o centro do elipsóide  $c \in \mathbf{R}^{nd}$ , um ponto  $p \in \mathbf{R}^{nd}$  está contido no elipsóide se

$$(p - c)^T G (p - c) \leq 1.$$

Como estamos interessados no elipsóide centrado na origem, temos que  $c = 0$  e queremos que

$$p^T G p \leq 1.$$

O volume do elipsóide é dado por

$$\rho \det(G^{-1/2}),$$

com  $\rho$  volume da bola unitária em  $\mathbf{R}^{nd}$ . Para elipsóides centrados na origem, podemos escrever o volume escalado como

$$-\log(\det(G)).$$

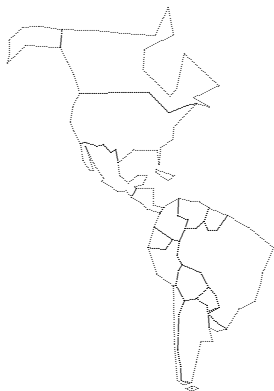
O modelo para este problema pode ser escrito como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -\sum_{i=1}^{nd} \log(l_{ij}) \\ \text{sujeita a} & p_i^T L L^T p_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, np, \\ & l_{ij} \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, nd, \end{array}$$

onde  $p_i \in \mathbf{R}^{nd}$ ,  $L$  é uma matriz triangular inferior  $nd \times nd$  e  $\varepsilon > 0$ .

# Problema *America*

O *problema America* consiste em desenhar o mapa da América no plano, respeitando o formato dos países e mantendo suas áreas proporcionais à área real.



Suponha que, para cada país  $j$ , tenhamos um conjunto de  $n_j$  pontos  $p_i$  que estão na sua fronteira. Denotaremos por  $\Gamma_j$  uma  $n_j$ -upla,  $n_j \geq 3$ , de inteiros entre 1 e  $m$  que representam os índices destes pontos que estão na fronteira do país  $j$ .

Suponha que tenhamos também, para cada país  $j$ , a sua área real  $\beta_j > 0$ .

Desejamos encontrar pontos  $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^2$  tais que as áreas dos polígonos formados pelos pontos  $p_i$ ,  $i \in \Gamma_j$ , está perto de  $\beta_j$ , para todo país  $j$ .

# Problema *America*

Se um conjunto de localizações prováveis  $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_m$  dos pontos  $p_1, \dots, p_m$  é dado, o problema pode ser formulado como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \sum_{i=1}^m \|p_i - \bar{p}_i\|^2 \\ \text{sujeita a} & 0.99\beta_j \leq \text{área}_j \leq 1.01\beta_j, \quad j = 1, \dots, nc, \end{array}$$

onde

$$\text{área}_j = \frac{1}{2} \left[ (y_1 x_{n_j} - x_1 y_{n_j}) + \sum_{i=1}^{n_j-1} (y_{i+1} x_i - x_{i+1} y_i) \right]$$

é a área dada pelos segmentos  $p_1 = (x_1, y_1), \dots, p_{n_j} = (x_{n_j}, y_{n_j})$ .

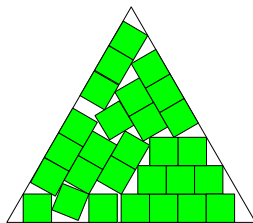
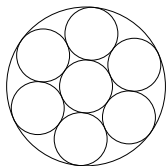


Se  $p_1 = (x_1, y_1), \dots, p_{n_j} = (x_{n_j}, y_{n_j})$  são os vértices consecutivos de um polígono simples, esta fórmula define a área do polígono.

Para resolver o **problema *America***, usamos número de países 17 e número de pontos  $np = 132$ . As **localizações “desejadas”**  $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{132}$  são dadas pelas **coordenadas dos pontos em um mapa padrão da América**.

# Problemas de empacotamento

Problemas de empacotamento são aqueles em que temos um objeto maior e queremos colocar vários objetos menores dentro do objeto maior, sem que haja sobreposição dos objetos menores.



# Problemas de empacotamento

Este tipo de problema é muito importante e muito estudado, já que **vários problemas reais** podem ser modelados como problemas de empacotamento. Por exemplo:

- Queremos colocar laranjas em uma caixa, de modo a colocar o maior número de laranjas possíveis;
- Queremos armazenar um número fixo colchões em caminhões, de modo a usar o menor número de caminhões possível;
- Dado um número fixo de canos, queremos saber o tamanho da menor caixa possível que permita que os canos possam ser nela armazenados.

# Problemas de empacotamento

Vamos nos concentrar nos casos em que temos um objeto maior e queremos colocar vários **objetos menores idênticos** dentro do objeto maior.

Como visto nos exemplos apresentados, problemas de empacotamento podem ter diferentes objetivos:

- Colocar o **maior número possível de objetos menores** dentro de um objeto maior de tamanho fixo.
- **Encontrar o menor tamanho para o objeto maior** que contenha um número fixo dos objetos menores.

# Problema de empacotamento de bolas em caixas

No caso em que os objetos menores são bolas em  $\mathbf{R}^2$  de raio  $r_i$  e o objeto maior é uma caixa em  $\mathbf{R}^2$ , com lados  $d_x$  e  $d_y$ , dois problemas de empacotamento que podem ser formulados são:

- 1 Encontrar o menor tamanho da caixa  $d_x \times d_y$  que contenha um número fixo  $m$  de bolas de raio  $r_i$ , sem sobreposição.
- 2 Encontrar o maior número de bolas de raio  $r_i$  (e suas posições no plano) que podem ser colocadas sem sobreposição dentro da caixa de tamanho fixo  $d_x \times d_y$ .

# Problema de empacotamento de bolas em caixas

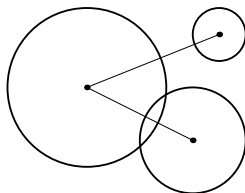
Note que, em ambos os problemas, queremos que as **bolas não se sobreponham**. Além disso, queremos que todas as bolas estejam **dentro da caixa**.

Para modelar estas restrições, consideraremos que a caixa tem seu canto inferior esquerdo na origem. Assim, seus vértices são dados por  $(0, 0)$ ,  $(d_x, 0)$ ,  $(0, d_y)$  e  $(d_x, d_y)$ .

Cada uma das  $m$  bolas será representada por seu centro  $c^i \in \mathbf{R}^2$  e seu raio  $r_i \in \mathbf{R}$ .

# Problema de empacotamento de bolas em caixas

Dizer que **duas bolas não podem se sobrepor** é equivalente a dizer que a distância de quaisquer dois centros  $c^i$  e  $c^j$  deve ser maior ou igual a  $r_i + r_j$ .

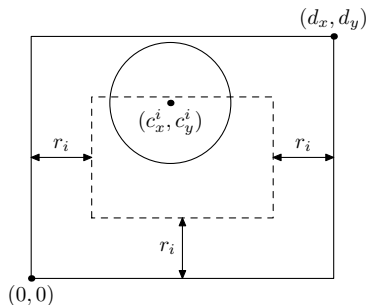


Ou seja,

$$\|c^i - c^j\|^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad \forall i, j, \quad i \neq j.$$

# Problema de empacotamento de bolas em caixas

Dizer que as **bolas estão dentro da caixa** é o mesmo que dizer que, para cada bola  $i$ , seu centro está dentro da caixa com vértices em  $(r_i, r_i)$ ,  $(d_x - r_i, r_i)$ ,  $(r_i, d_y - r_i)$  e  $(d_x - r_i, d_y - r_i)$ .





Esta restrição é equivalente a

$$\begin{aligned} r_i &\leq c_x^i \leq d_x - r_i, & \forall i, \\ r_i &\leq c_y^i \leq d_y - r_i, & \forall i. \end{aligned}$$

# Problema de empacotamento de bolas em caixas

Portanto, o **problema 1**, no qual queremos encontrar o menor tamanho da caixa  $d_x \times d_y$  que contenha um número fixo  $m$  de bolas com raios  $r_i$ , sem sobreposição, pode ser modelado da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & d_x d_y \\ \text{sujeita a} & \|c^i - c^j\|^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, i - 1, \\ & r_i \leq c_x^i \leq d_x - r_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & r_i \leq c_y^i \leq d_y - r_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & d_x \geq 0, \\ & d_y \geq 0, \end{array}$$

com  $r_i \in \mathbf{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  dados.

# Problema de empacotamento de bolas em caixas

O **problema 2**, no qual queremos encontrar o maior número de bolas de raio  $r$  (e suas posições no plano) que podem ser colocadas sem sobreposição dentro da caixa de tamanho fixo  $d_x \times d_y$ , pode ser modelado da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \alpha \\ \text{sujeita a} & \|c^i - c^j\|^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, i - 1, \\ & r_i \leq c_x^i \leq d_x - r_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & r_i \leq c_y^i \leq d_y - r_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{array}$$

com  $\alpha \in \mathbf{R}$  constante,  $d_x, d_y \in \mathbf{R}$ ,  $r_i \in \mathbf{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , dados.

# Problema de empacotamento de bolas em caixas

Resolvemos este problema para valores fixos crescentes de  $m$ .

Se as restrições são satisfeitas, significa que as  $m$  bolas escolhidas podem ser empacotadas na caixa.

# Problema de empacotamento de bolas em caixas

Note que podemos escrever o **modelo apenas com restrições de caixa** (mais fácil de resolver). A nova formulação seria

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \max\{0, (r_i + r_j)^2 - \|c^i - c^j\|^2\}^2 \\ \text{sujeita a} & r_i \leq c_x^i \leq d_x - r_i, & i = 1, \dots, m, \\ & r_i \leq c_y^i \leq d_y - r_i, & i = 1, \dots, m, \end{array}$$

com  $d_x, d_y \in \mathbf{R}$ ,  $r_i \in \mathbf{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , dados.

Neste caso, se, para um dado  $m$ , a solução obtida tiver **valor de função objetivo 0**, significa que as  $m$  bolas podem ser empacotadas na caixa.

O problema com esta abordagem é que esta função objetivo possui **muitos minimizadores locais**.

# Problema de empacotamento de bolas em bolas

Note que podemos usar as mesmas ideias do empacotamento do bolas em caixas para resolver problemas de empacotamento de bolas em bolas:

- 1 Encontrar a bola de menor raio  $R$  que contenha um número fixo  $m$  de bolas de raio  $r_i$ , sem sobreposição.
- 2 Encontrar o maior número de bolas de raio  $r_i$  (e suas posições no plano) que podem ser colocadas sem sobreposição dentro da uma bola de raio fixo  $R$ .

# Problema de empacotamento de bolas em bolas

O que devemos mudar nos modelos de empacotamento de bolas em caixas para que se transformem em modelos para empacotamento de bolas em bolas é como decidir se uma bola de raio  $r_i$  está dentro de uma bola maior de raio  $R$ .

Para isso, basta pedir que a distância do centro da bola de raio  $R$  ao centro da bola de raio  $r_i$  seja, no máximo,  $R - r_i$ .

# Problema de empacotamento de bolas em bolas

Vamos supor que bola de raio  $R$  está centrada na origem. Neste caso, a restrição pode ser escrita como

$$\|c^i\|^2 \leq (R - r_i)^2, \quad i = 1, \dots, m.$$



# Problema de empacotamento de bolas em bolas

Assim, o problema 1, no qual queremos encontrar a bola de menor raio  $R$  que contenha um número fixo  $m$  de bolas de raio  $r_i$ , sem sobreposição, pode ser modelado da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & R \\ \text{sujeita a} & \|c^i - c^j\|^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, i - 1, \\ & \|c^i\|^2 \leq (R - r_i)^2, \quad i = 1, \dots, m, \\ & R \geq 0, \end{array}$$

com  $r_i \in \mathbf{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , dados.

# Problema de empacotamento de bolas em bolas

O **problema 2**, no qual queremos encontrar o maior número de bolas de raio  $r_i$  (e suas posições no plano) que podem ser colocadas sem sobreposição dentro de uma bola de raio fixo  $R$ , pode ser modelado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \alpha \\ &\text{sujeita a } \quad \|c^i - c^j\|^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, i - 1, \\ &\quad \quad \quad \|c^i\|^2 \leq (R - r_i)^2, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

com  $\alpha \in \mathbf{R}$  constante,  $R \in \mathbf{R}$ ,  $r_i \in \mathbf{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , dados.