Existência e otimalidade de pontos extremos

Marina Andretta

ICMC-USP

19 de outubro de 2016

Baseado no livro Introduction to Linear Optimization, de D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis.

Existência de pontos extremos

Note que nem todo poliedro tem pontos extremos.

Por exemplo, considere um semiespaço de $\boldsymbol{R}^n$, $n > 1$. Este é um poliedro que não contém pontos extremos.

Mais ainda, o poliedro $\{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax \geq b\}$ não tem uma solução básica se a matriz A tem menos de n linhas.

A existência de pontos extremos em um poliedro está ligada com o fato do poliedro conter ou não uma reta (infinita).

Definição 1. *Um poliedro* $P \subset \mathbb{R}^n$ *contém uma reta se existe um vetor* $x \in P$ *e um vetor não-nulo* $d \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $x + \lambda d \in P$ *para todo escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 1. *Suponha que* $P = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid a_i^T x \geq b_i, i = 1, ..., m\}$ *é um poliedro não-vazio. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *O poliedro* P *tem pelo menos um ponto extremo.*

(b) *O poliedro* P *não contém uma reta.*

(c) *Existem* n *vetores na família* $a_1, ..., a_m$ *que são linearmente independentes.*

Prova: Para mostrar que as afirmações (a), (b) e (c) são equivalentes, vamos mostrar que $(b) \Rightarrow (a)$, $(a) \Rightarrow (c)$ e $(c) \Rightarrow (b)$.

Primeiramente vamos mostrar que $(b) \Rightarrow (a)$, ou seja, se P não contém uma reta, ele possui uma solução básica viável e, portanto, um ponto extremo.

Seja x um elemento de P e I o conjunto de índices das restrições ativas em x, ou seja, $I = \{i \mid a_i^T x = b_i\}$.

Prova do Teorema 1

Se n dos vetores a_i, $i \in I$, são linearmente independentes, então x é uma solução básica viável e, portanto, existe uma solução básica viável.

Se não há n vetores a_i, $i \in I$, linearmente independentes, então estes vetores geram um subespaço próprio de $\boldsymbol{R}^n$. Neste caso, existe um vetor não-nulo $d \in \boldsymbol{R}^n$ tal que $a_i^T d = 0$, para todo $i \in I$.

Prova do Teorema 1

Considere a reta dada pelos pontos $y = x + \lambda d$, com $\lambda \in \boldsymbol{R}$. Para todo $i \in I$, temos $a_i^T y = a_i^T (x + \lambda d) = a_i^T x + \lambda a_i^T d = a_i^T x + 0 = b_i$. Assim, as restrições que são ativas para x também são ativas para todo ponto y da reta. No entanto, como supomos que o poliedro não contém retas, ao variar λ, alguma restrição será violada.

No ponto em que alguma restrição passará a ser violada, uma nova restrição deve se tornar ativa. Desta forma, existe algum λ^* e algum $j \notin I$ tal que $a_j^T (x + \lambda^* d) = b_j$.

Prova do Teorema 1

Como $j \notin I$, temos $a_j^T x \neq b_j$. Além disso, como $a_j^T (x + \lambda^* d) = b_j$, temos $a_j^T d \neq 0$. E como $a_i^T d = 0$ para todo $i \in I$, o vetor d é ortogonal a toda combinação linear dos vetores a_i, com $i \in I$. Portanto, a_j não pode ser uma combinação linear dos vetores a_i, com $i \in I$.

Assim, passando do vetor x para o vetor $x + \lambda^* d$, o número de restrições ativas linearmente independentes aumenta de ao menos um. Repentindo este argumento tantas vezes quanto necessário, teremos um ponto em que n restrições ativas são linearmente independentes. Tal ponto é, por definição, uma solução básica e, como nos mantemos sempre no poliedro, é viável.

Prova do Teorema 1

Agora vamos mostrar que $(a) \Rightarrow (c)$, ou seja, se P tem pelo menos um ponto extremo então existem n vetores na família $a_1, ..., a_m$ que são linearmente independentes.

Se x é um ponto extremo de P, então x é uma solução básica viável (pelo Teorema 2 da aula sobre "vértices, pontos extremos e soluções básicas viáveis"). Portanto, existem n restrições ativas em x que são linearmente independentes. Ou seja, os n vetores a_i correspondentes a estas restrições são linearmente independentes.

Prova do Teorema 1

Por fim, vamos mostrar que $(c) \Rightarrow (b)$, ou seja, se existem n vetores na família $a_1, ..., a_m$ que são linearmente independentes, então P não contém uma reta.

Sem perda de generalidade, vamos supor que os vetores $a_1, ..., a_n$ são linearmente independentes. Suponha, por absurdo, que P contém uma reta dada por $x + \lambda d$, com d não-nulo. Como a reta toda está em P, temos que $a_i^T(x + \lambda d) \geq b_i$, para todo $i = 1, ..., m$ e todo $\lambda \in \boldsymbol{R}$.

Prova do Teorema 1

Note que se $a_i^T d < 0$, podemos escolher λ suficientemente grande para violar a restrição $a_i^T(x + \lambda d) \geq b_i$. Analogamente, se $a_i^T d > 0$, podemos escolher λ suficientemente negativo para violar a restrição $a_i^T(x + \lambda d) \geq b_i$. Portanto, $a_i^T d = 0$ para todo i.

Como os vetores $a_1, ..., a_n$ são linearmente independentes, temos que $d = 0$, o que contradiz nossa escolha de d não-nulo. Portanto, P não contém uma reta. $\square$

Note que um poliedro limitado não contém uma reta.

Além disso, o ortante positivo $\{x \mid x \geq 0\}$ não contém uma reta. Como um poliedro na forma padrão está contido no ortante positivo, ele também não contém uma reta.

Com essas observações, temos o seguinte corolário:

Corolário 1. *Todo poliedro limitado não-vazio e todo poliedro não-vazio na forma padrão tem pelo menos uma solução básica viável.*

Otimalidade de pontos extremos

Agora que definimos as condições para um poliedro ter pontos extremos, vamos mostrar que o resultado intuitivo que diz que quando um problema de programação linear tem solução ótima e o conjunto viável tem um ponto extremo, sempre podemos encontrar uma solução ótima no conjunto de pontos extremos da região viável é verdadeiro.

Teorema 2. *Considere o problema de programação linear de minimizar* $c^T x$ *em um poliedro* P*. Suponha que* P *tem pelo menos um ponto extremo e que existe uma solução ótima. Então existe uma solução ótima que é um ponto extremo de* P*.*

Prova do Teorema 2

Prova: Seja Q o conjunto de todas as soluções ótimas, que é não-vazio por hipótese. Seja P da forma $P = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax \geq b\}$ e seja v o custo ótimo dado por $c^T x$.

Então o conjunto dos pontos ótimos $Q = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax \geq b, c^T x = v\}$ é um poliedro.

Como P tem pelo menos um ponto extremo, pelo Teorema 1 sabemos que P não contém retas. Como $Q \subset P$, Q também não contém retas. Portanto, Q contém um ponto extremo.

Prova do Teorema 2

Seja x^* um ponto extremo de Q. Suponha, por absurdo, que x^* não é um ponto extremo de P. Então existem $y \in P$ e $z \in P$, $y \neq x^*$ e $z \neq x^*$, tais que, para algum $\lambda \in [0, 1]$, $x^* = \lambda y + (1 - \lambda)z$.

Logo, $v = c^T x^* = c^T(\lambda y + (1 - \lambda)z)$. Como v é o custo ótimo, temos $c^T y \geq v$ e $c^T z \geq v$. Portanto, $c^T y = c^T z = v$. Ou seja, $y, z \in Q$. Mas isso contradiz o fato de x^* ser ponto extremo de Q.

Portanto, x^* é ponto extremo de P. E, como $x^* \in Q$, x^* é ótimo. $\square$

Otimalidade de pontos extremos

O Teorema 2 se aplica a poliedros na forma padrão, assim como a poliedros limitados, já que eles não contêm retas.

O Teorema 3 é um pouco mais forte do que o Teorema 2, já que ele afirma que a existência de um ponto extremo pode ser ignorada, desde que o custo ótimo seja finito.

Teorema 3. *Considere o problema de programação linear de minimizar* $c^T x$ *em um poliedro* P*. Suponha que* P *tem pelo menos um ponto extremo. Então ou o custo ótimo é* $-\infty$ *ou existe um ponto extremo de* P *que é ótimo.*

Prova do Teorema 3

Prova: Esta demonstração é muito parecida com a demonstração do Teorema 1. A diferença é que ao mover para uma solução básica viável, tomaremos cuidado para o custo não crescer.

Vamos usar a seguinte terminologia: diremos que um elemento $x \in P$ tem posto k se podemos encontrar k (e não mais que k) restrições ativas linearmente independentes em x.

Prova do Teorema 3

Suponha que o custo ótimo é finito. Seja $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ e considere algum $x \in P$ com posto $k < n$. Vamos mostrar que existe algum $y \in P$ com posto maior que satisfaz $c^T y \leq c^T x$.

Seja $I = \{i \mid a_i^T x = b_i\}$, com a_i a i-ésima linha de A. Como $k < n$, os vetores a_i, $i \in I$, estão em um subespaço próprio de $\mathbb{R}^n$. Então podemos escolher um vetor não-nulo $d \in \mathbb{R}^n$ que é ortogonal a todo a_i, $i \in I$. Além disso, podemos supor que $c^T d \leq 0$ (se escolhessemos d tal que $c^T d \geq 0$, bastaria trocá-lo por $-d$).

Prova do Teorema 3

Se $c^T d < 0$, considere a semi-reta $y = x + \lambda d$, com λ escalar positivo. Todos os pontos nesta semi-reta satisfazem $a_i^T y = b_i$, para todo $i \in I$. Se toda a semi-reta estivesse contida em P, o custo ótimo seria $-\infty$, mas estamos supondo que o custo otimo é finito.

Portanto, a semi-reta sai de P em algum ponto. Então existe um $\lambda^* > 0$ e $j \notin I$ tal que $a_j(x + \lambda^* d) = b_j$. Seja $y = x + \lambda^* d$. Note que $c^T y < c^T x$. Como na demonstração do Teorema 1, a_j é linearmente independente de a_i, para todo $i \in I$, e, portanto, y tem posto pelo menos $k + 1$.

Prova do Teorema 3

Se $c^T d = 0$, considere a reta $y = x + \lambda d$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Como P não contém retas, esta reta deve sair de P em algum ponto. Assim, pelos mesmos argumentos apresentados anteriormente, podemos encontrar um ponto y com posto maior do que o posto de x. Neste caso, como $c^T d = 0$, temos $c^T y = c^T x$.

Prova do Teorema 3

Em ambos os casos ($c^T d < 0$ e $c^T d = 0$) encontramos um ponto y tal que $c^T y \leq c^T x$, com posto maior do que o posto de x. Repetindo este processo tantas vezes quanto necessário, encontraremos um vetor w com posto n (ou seja, uma solução básica viável) tal que $c^T w \leq c^T x$.

Sejam $w^1, w^2, ..., w^r$ as soluções básicas viáveis de P. Seja w^* uma solução viável básica tal que $c^T w^* \leq c^T w^i$, para todo i. Já mostramos que para todo x existe um i tal que $c^T w^i \leq c^T x$. Então $c^T w^* \leq c^T x$ para todo $x \in P$. Portanto a solução básica viável w^* é ótima. $\square$

Para um problema de programação linear geral, se o conjunto viável não contém um ponto extremo, o Teorema 3 não pode ser aplicado diretamente.

Por outro lado, todo problema de programação linear pode ser escrito na forma padrão, para o qual o Teorema 3 sempre vale.

Assim, temos o seguinte corolário:

Corolário 2. *Considere o problema de programação linear de minimizar $c^T x$ em um poliedro P não-vazio. Então ou o custo ótimo é $-\infty$ ou existe um ponto extremo de P que é ótimo.*