Poliedros na forma padrão

Marina Andretta

ICMC-USP

19 de outubro de 2016

Baseado no livro Introduction to Linear Optimization, de D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis.

Poliedros na forma padrão

Já vimos a definição de soluções básicas para poliedros gerais. Agora iremos nos focar em resultados para poliedros na forma padrão, que é uma maneira conveniente de representar poliedros para o desenvolvimento de algoritmos.

Seja $P = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ um poliedro na forma padrão, com $A \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$ e $b \in \boldsymbol{R}^m$.

A menos que especifiquemos o contrário, iremos supor que as linhas de A são linearmente independentes (então, $m \leq n$).

Poliedros na forma padrão

Mais adiante veremos que quando P não é vazio, linhas linearmente dependentes de A correspondem a restrições redundantes, que podem ser eliminadas.

Portanto, esta suposição pode ser feita sem perda de generalidade.

Soluções básicas

Lembre-se que em uma solução básica deve haver n restrições linearmente independentes que são ativas.

Além disso, uma solução básica deve satisfazer todas as restrições de igualdade.

Soluções básicas

No caso do poliedro P, isso significa que a solução básica deve satisfazer $Ax = b$, que corresponde a m restrições ativas linearmente independentes (já que estamos supondo que as linhas de A são linearmente independentes).

Para obtermos as $n - m$ restrições ativas restantes, precisamos escolher $n - m$ variáveis x_i e defini-las como 0, fazendo com que as restrições $x_i \geq 0$ sejam ativas.

Mas, como as n restrições ativas precisam ser linearmente independentes, a escolha destas $n - m$ variáveis não pode ser arbitrária.

Teorema 1. *Considere as restrições* $Ax = b$ *e* $x \geq 0$, *com* $A \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$, $b \in \boldsymbol{R}^m$ *e* A *com linhas linearmente independentes. Um vetor* $\bar{x} \in \boldsymbol{R}^n$ *é uma solução básica se, e somente se,* $A\bar{x} = b$ *e há índices* $B(1), ..., B(m)$ *tais que*

(a) *as colunas* $A_{B(1)}, ..., A_{B(m)}$ *são linearmente independentes;*

(b) *se* $i \neq B(1), ..., B(m)$, *então* $\bar{x}_i = 0$.

Prova do Teorema 1

Prova: Considere um vetor $x \in \boldsymbol{R}^n$ que satisfaz $Ax = b$ e suponha que existam índices $B(1), ..., B(m)$ que satisfaçam as afirmações (a) e (b) do Teorema 1.

Como $x_i = 0$ para $i \neq B(1), ..., B(m)$ e $Ax = b$, temos

$$\sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} x_{B(i)} = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i = Ax = b.$$

Como as colunas $A_{B(1)}, ..., A_{B(m)}$ são linearmente independentes, $x_{B(1)}, ..., x_{B(m)}$ é único. Assim, o sistema de equações formado pelas restrições ativas tem solução única.

Prova do Teorema 1

Pelo Teorema 1 da aula sobre "vértices, pontos extremos e soluções básicas viáveis", temos que existem n restrições ativas linearmente independentes. Ou seja, x é solução básica.

Prova do Teorema 1

Suponha agora que x é uma solução básica. Sejam $x_{B(1)}, ..., x_{B(k)}$ as componentes não-nulas de x.

Como x é uma solução básica, o sistema de equações formado pelas restrições $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = b$ e $x_i = 0$, para $i \neq B(1), ..., B(k)$, possui uma solução única (veja Teorema 1 da aula sobre "vértices, pontos extremos e soluções básicas viáveis").

Portanto, o sistema $\sum_{i=1}^{k} A_{B(i)} x_{B(i)} = b$ também tem solução única. Ou seja, as colunas $A_{B(1)}, ..., A_{B(k)}$ são linearmente independentes. Por isso, $k \leq m$.

Prova do Teorema 1

Como A tem m linhas linearmente independentes, ela também tem m colunas linearmente independentes, que geram o espaço $\boldsymbol{R}^m$. Assim, é possível encontrar $m - k$ colunas adicionais $A_{B(k+1)}, \ldots, A_{B(m)}$ de forma que as colunas $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ sejam linearmente independentes.

Além disso, como $k \leq m$, se $i \neq B(1), \ldots, B(m)$, temos que $i \neq B(1), \ldots, B(k)$. Como $B(1), \ldots, B(k)$ são as componentes não-nulas de x, temos que $x_i = 0$, para $i \neq B(1), \ldots, B(m)$. $\square$

Usando o Teorema 1, podemos usar o seguinte procedimento para construir soluções básicas:

1. Escolha m colunas $A_{B(1)}, ..., A_{B(m)}$ de A linearmente independentes, formando uma matriz B.
2. Defina $x_i = 0$ para todo $i \neq B(1), ..., B(m)$.
3. Resolva o sistema linear $Bx_B = b$ com m equações e m incógnitas, dadas por $x_B = (x_{B(1)}, ..., x_{B(m)})$.

Soluções básicas

Note que se uma solução básica calculada usando este procedimento tem todas as componentes não-negativas, então ela é uma solução básica viável.

Por outro lado, como toda solução básica viável é uma solução básica, ela pode ser calculada usando este procedimento.

Soluções básicas

Se x é uma solução básica, as variáveis $x_{B(1)}, ..., x_{B(m)}$ são chamadas de variáveis básicas. As demais variáveis são chamadas de variáveis não-básicas.

As colunas $A_{B(1)}, ..., A_{B(m)}$ são chamadas de colunas básicas. Como elas são linearmente independentes, elas formam uma base de $\mathbb{R}^m$.

Diremos que duas bases são distintas de se os conjuntos de índices básicos $\{B(1), ..., B(m)\}$ para as duas bases forem diferentes.

Se os conjuntos de índices básicos forem iguais (mesmo que a ordem dos índices seja outra), diremos que as bases são as mesmas.

Soluções básicas

Rearranjando as colunas da matriz A de forma que as colunas $A_{B(1)}, ..., A_{B(m)}$ fiquem no início, temos a matriz $\bar{A}$

$$\bar{A} = (B \quad N),$$

com

$$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ A_{B(1)} & \cdots & A_{B(m)} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

e N formada pelas colunas restantes de A.

Como as colunas de B são linearmente independentes, B é inversível.

Soluções básicas

De modo similar, podemos definir um vetor básico $\bar{x}$ como

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{B(1)} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B(m)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, as variáveis básicas podem ser determinadas resolvendo o sistema linear $B\bar{x}_B = b$, que tem solução única $\bar{x}_B = B^{-1}b$.

Exemplo

Considere as restrições $Ax = b$ como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Vamos escolher as colunas A_4, A_5, A_6 e A_7 como colunas básicas.

Elas são linearmente independentes e a matriz básica B correspondente é a matriz identidade.

Neste caso, a solução básica é dada por $x = (0, 0, 0, 8, 12, 4, 6, 0)$, que tem todas as componentes não-negativas. Então, x é uma solução básica viável.

Exemplo

Uma outra base pode ser obtida escolhendo as colunas A_3, A_5, A_6 e A_7, que são linearmente independentes. Ou seja,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema

$$Bx_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = b,$$

obtemos $x_B = (4, -12, 4, 6)$.

Exemplo

Assim, a solução básica correspondente é dada por $x = (0, 0, 4, 0, -12, 4, 6, 0)$.

Como $x_5 = -12 < 0$, x não é viável.

Exemplo

Note que as colunas A_7 e A_8 são iguais. Então, os conjuntos $\{A_3, A_5, A_6, A_7\}$ e $\{A_3, A_5, A_6, A_8\}$ são iguais.

No entanto, os conjuntos de índices básicos correspondentes são $\{3, 5, 6, 7\}$ e $\{3, 5, 6, 8\}$, que são diferentes.

Portanto, pela nossa definição, temos duas bases diferentes.

Correspondência entre bases e soluções básicas

Soluções básicas diferentes devem corresponder a bases diferentes, já que uma base determina uma única solução básica.

No entanto, duas bases diferentes podem levar a uma mesma solução básica.

Por exemplo, se temos $b = 0$, a única solução básica é dada pelo vetor nulo, para todas as bases.

Este fenômeno tem importantes consequências algorítmicas e está relacionado com degenerescência. Isso será tratado mais adiante.

Soluções básicas adjacentes e bases adjacentes

Lembre-se que dizemos que duas soluções básicas são adjacentes se ambas tem $n-1$ restrições linearmente independentes iguais.

Para problemas na forma padrão, também dizemos que duas bases são adjacentes se elas têm somente uma coluna básica diferente.

Não é difícil ver que soluções básicas adjacentes podem ser obtidas de bases adjacentes.

Além disso, se duas bases levam a diferentes soluções básicas, estas são adjacentes.

Exemplo

No exemplo anterior, as bases $\{A_4, A_5, A_6, A_7\}$ e $\{A_3, A_5, A_6, A_7\}$ são adjacentes porque elas têm apenas uma coluna diferente.

As soluções básicas correspondentes são $(0, 0, 0, 8, 12, 4, 6, 0)$ e $(0, 0, 4, 0, -12, 4, 6, 0)$ são adjacentes.

Temos $n = 8$ e um total de 7 restrições ativas linearmente independentes em comum, que são as 4 restrições de igualdade, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ e $x_8 \geq 0$.

Hipótese de posto completo de A

Teorema 2. *Seja* $P = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ *um poliedro não-vazio com* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *com linhas* $a_1^T, \ldots, a_m^T$. *Suponha que posto*$(A) = k < m$ *e que as linhas* $a_{i_1}^T, \ldots, a_{i_k}^T$ *são linearmente independentes. Considere o poliedro* $Q = \{x \mid a_{i_1}^T x = b_{i_1}, \ldots, a_{i_k}^T x = b_{i_k}, x \geq 0\}$. *Então* $P = Q$.

Prova: Exercício.

Hipótese de posto completo de A

Note que o poliedro Q do Teorema 2 está na forma padrão $Q = \{x \mid Dx = f, x \geq 0\}$, com $f \in \boldsymbol{R}^k$, $D \in \boldsymbol{R}^{k \times n}$ uma submatriz de A com posto k.

Concluímos que, contanto que o poliedro seja não-vazio, um problema de programação linear na forma padrão pode ser reduzido a um outro problema equivalente de programação linear na forma padrão (com mesmo conjunto viável) com restrições linearmente independentes.

Exemplo

Considere o poliedro não-vazio definido pelas restrições

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2, \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1, \\ & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

A matriz A correspondente

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tem posto 2, já que as duas últimas linhas são linearmente independentes e a primeira é resultado da soma das outras duas.

Então, a primeira restrição é redundante e, ao eliminá-la, temos o mesmo poliedro.