Poliedros e conjuntos convexos

Marina Andretta

ICMC-USP

19 de outubro de 2016

Baseado no livro Introduction to Linear Optimization, de D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis.

Vamos agora apresentar alguns conceitos importantes que serão usados para estudar a geometria de problemas de programação linear.

Definição 1. *Um poliedro é um conjunto que pode ser descrito na forma* $\{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax \geq b\}$, *com* A *uma matriz em* $\boldsymbol{R}^{m \times n}$ *e* b *um vetor em* $\boldsymbol{R}^m$.

Como vimos anteriormente, o conjunto de pontos viáveis de um problema de programação linear pode ser definido usando a forma $Ax \geq b$. Portanto, este conjunto é um poliedro.

Um conjunto da forma $\{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ também é um poliedro e será chamado de poliedro na forma padrão.

Hiperplanos, semiespaços e poliedros

Poliedros podem se estender para o infinito ou estar confinados em uma região finita.

Definição 2. *Um conjunto $S \subset \boldsymbol{R}^n$ é dito limitado se existe uma constante K tal que o valor absoluto de cada componente de todo elemento de S é menor ou igual a K.*

Definição 3. *Seja a um vetor não-nulo em $\boldsymbol{R}^n$ e seja b um escalar. O conjunto $\{x \in \boldsymbol{R}^n \mid a^T x = b\}$ é chamado de hiperplano. O conjunto $\{x \in \boldsymbol{R}^n \mid a^T x \geq b\}$ é chamado de semiespaço.*

Note que um semiespaço tem um hiperplano como borda.

Temos também que um poliedro é resultado da intersecção finita de semiespaços.

Lema 1. *Considere o vetor* $a \in \boldsymbol{R}^n$ *e um hiperplano* $S = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid a^T x = b\}$. *O vetor* a *é perpendicular a todo ponto do hiperplano* S.

Prova: Tome dois pontos arbitrários y e z de S. Temos então que $a^T y = b$ e $a^T z = b$. Ou seja, $a^T y - a^T z = b - b = 0 \Rightarrow a^T (y - z) = 0$.

Portanto, a é perpendicular a qualquer vetor direção que está no hiperplano. $\square$

Conjuntos convexos

Definição 4. *Um conjunto $S \in \boldsymbol{R}^n$ é convexo se, para todo $x, y \in S$ e todo $\lambda \in [0,1]$, temos que $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$.*

Note que se $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y$ está no segmento de reta que liga x a y.

Portanto, um conjunto S é convexo se todo segmento de reta que liga dois de seus elementos está inteiramente contido em S.

Definição 5. *Sejam $x^1, ..., x^k$ vetores de $\boldsymbol{R}^n$ e sejam $\lambda_1, ..., \lambda_k$ escalares não-negativos com $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.*

(a) *O vetor $\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$ é chamado de combinação convexa dos vetores $x_1, ..., x_k$.*

(b) *O casco convexo (ou fecho convexo) dos vetores $x^1, ..., x^k$ é o conjunto de todas as combinações convexas destes vetores.*

Conjuntos convexos

Algumas propriedades importantes sobre conjuntos convexos são apresentadas a seguir.

Teorema 1.

(a) *A intersecção de conjuntos convexos é convexa.*

(b) *Todo poliedro é um conjunto convexo.*

(c) *Uma combinação convexa de um número finito de elementos de um conjunto convexo S também pertence a S.*

(d) *O casco convexo de um número finito de vetores é um conjunto convexo.*

Prova do Teorema 1

Prova:

(a) Sejam S_i, $i = 1, ..., k$, conjuntos convexos. Seja $S = \cap_{i=1}^{k} S_i$. Considere dois elementos x e y pertencentes a S.

Pela definição de S, temos que $x, y \in S_i$, para $i = 1, ..., k$. Como cada S_i é convexo, temos que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S_i$, para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Portanto, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$, para todo $\lambda \in [0, 1]$, o que significa que S é convexo. $\square$

Prova do Teorema 1

(b) Considere dois elementos y e z de um poliedro descrito na forma $\{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax \geq b\}$, com A uma matriz em $\boldsymbol{R}^{m \times n}$ e b um vetor em $\boldsymbol{R}^m$. Temos então que $Ay \geq b$ e $Az \geq b$. Assim, para qualquer $\lambda \in [0, 1]$, temos

$$A(\lambda y + (1 - \lambda)z) = \lambda Ay + (1 - \lambda)Az \geq \lambda b + (1 - \lambda)b = b.$$

Portanto, $\lambda y + (1 - \lambda)z$ também pertence ao poliedro, o que significa que o poliedro é convexo. $\square$

(c) Exercício.

(d) Exercício.