

Programação Matemática

Professoras Aline Leão e Franklina Toledo

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC
Universidade de São Paulo - USP

2015

Problema da Mistura

O PROBLEMA DA MISTURA

Problema da mistura

- Materiais disponíveis são combinados para gerar novos produtos com características convenientes;
- Um dos primeiros problemas de otimização linear implementados com sucesso na prática.
- Abordagens:
 - Ração;
 - Ligas metálicas;
 - Composição de filtros de areia.

Problema da mistura - Ração

- Queremos saber quais as quantidades ideais de cada ingrediente para fazer uma quantidade de ração, com as necessidades nutricionais atendidas e o custo total dos ingredientes seja o menor possível.
- Temos os ingredientes e seus custos:
 - Milho (M) - R\$ 65,00 /Kg
 - Farinha de ossos (F) - R\$ 30,00 /Kg

Problema da mistura - Ração

- Para fazer uma certa quantidade de ração para aves, é necessário uma certa quantidade nutrientes: vitamina A (V_A), vitamina B (V_B) e proteína (V_P).
- Um kg dos ingredientes apresenta esses nutrientes em determinadas unidades (un.):
 - M - 2 un. de V_A , 3 un. de V_B e 1 un. de V_P ;
 - F - 3 un. de V_A , 2 un. de V_B ;

Problema da mistura - Ração

- Deseja-se prepara uma ração que contenha no mínimo 7 unidades de V_A , 9 unidades de V_B e 1 unidade de V_P .

Nutrientes	Ingredientes		Qtde Mínima
	Milho (M)	F. Osso (F)	
Vitamina A (V_A)	2	3	7
Vitamina B (V_B)	3	2	9
Proteína (V_C)	1	0	1
Custos (R\$/kg)	65	30	

- Como misturar (as quantidades) dos ingredientes de modo que atenda as necessidades nutricionais e produza uma ração de menor custo possível?

Problema da mistura - O que decidir?

- Quantidades dos ingredientes presentes na mistura?
- Decisões: Denominadas Variáveis de decisão.
- Definindo
- x_M = quantidade de milho presente na mistura (kg).
- x_F = quantidade de farinha de osso presente na mistura (kg).

Problema da mistura - Decidir para que?

- função custo (f)
- O custo mínimo seria nulo se não fosse as quantidades mínimas de nutrientes a serem atendidas (Vitamina A, Vitamina B e Proteína)(os custos são positivos). Objetivo: minimizar o custo total da mistura.
- Custo total é dado por uma função objetivo.
$$f(x_M, x_F) = 65x_M + 30x_F.$$
- Devemos determinar x_M e x_F tal que $f(x_M, x_F)$ seja o menor possível. $\min f(x_M, x_F) = 65x_M + 30x_F$

Modelagem do Exemplo 1

Considere que as composições de vitamina A, vitamina B e proteína na ração sejam satisfeitas.

Modelo Matemático:

$$\min f(x_M, x_F) = 65x_M + 30x_F$$

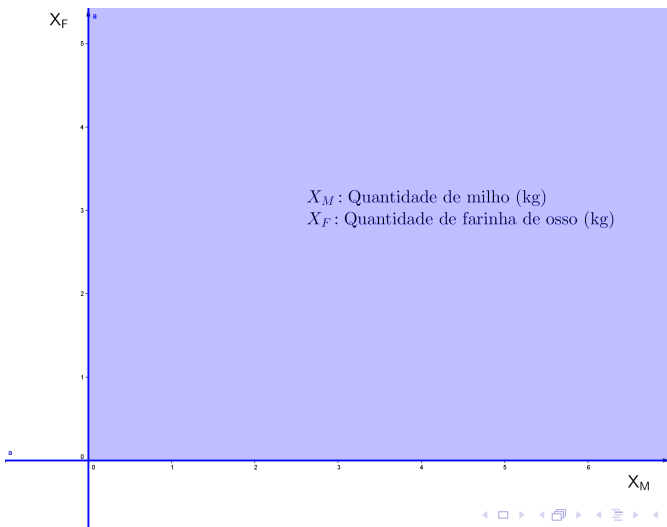
$$2x_M + 3x_F \geq 7$$

$$3x_M + 2x_F \geq 9$$

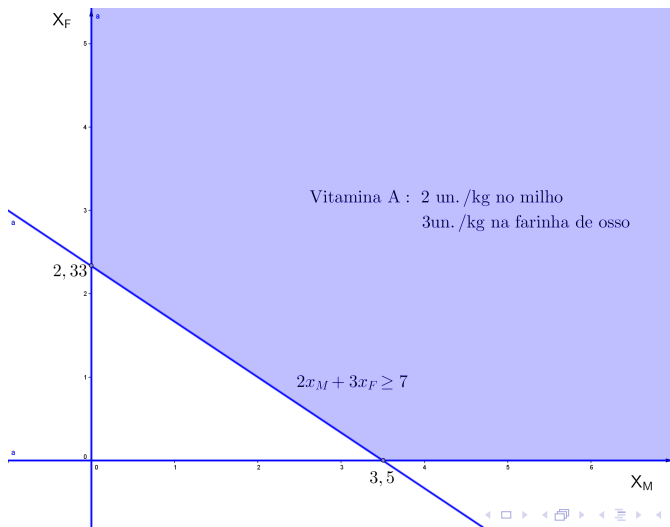
$$1x_M + 0x_F \geq 1$$

$$x_M \geq 0, x_F \geq 0.$$

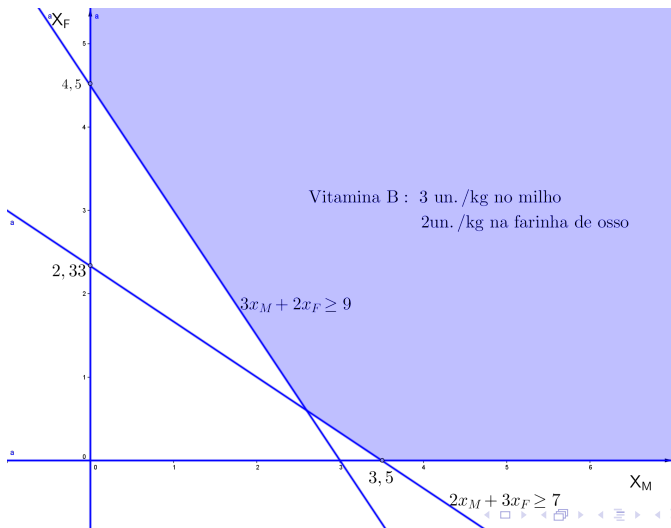
Problema da mistura - Ração



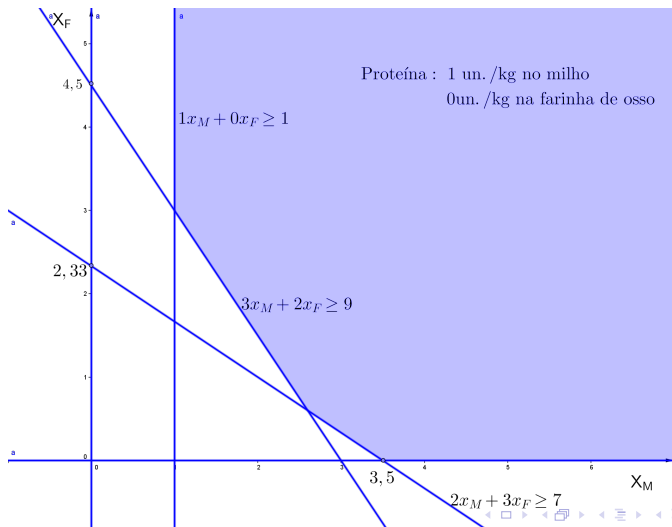
Problema da mistura - Ração



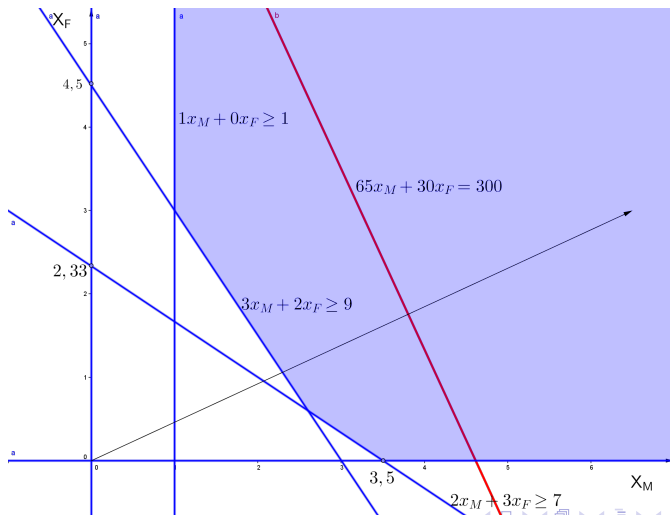
Problema da mistura - Ração



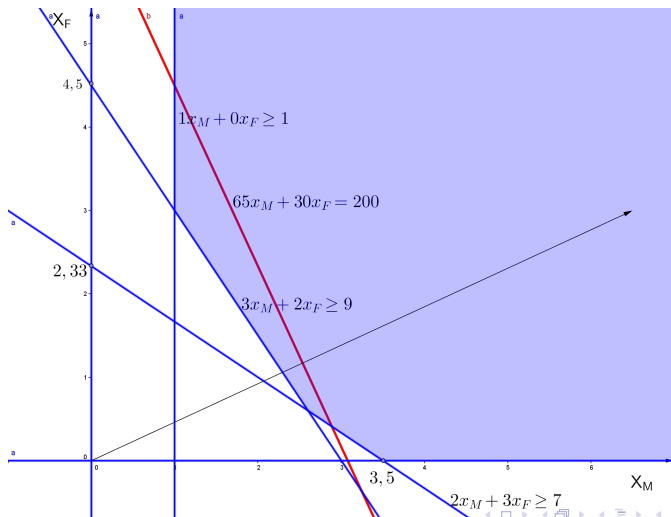
Problema da mistura - Ração



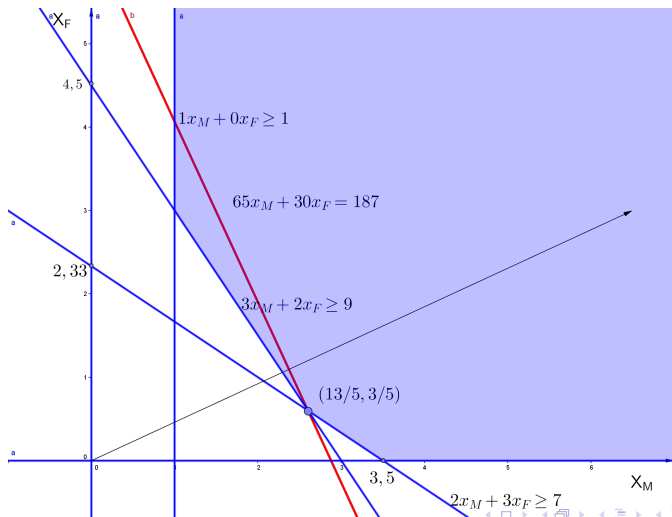
Problema da mistura - Ração



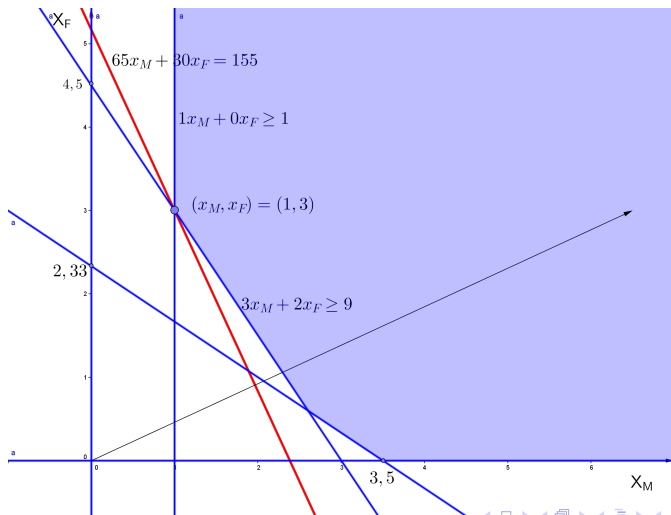
Problema da mistura - Ração



Problema da mistura - Ração

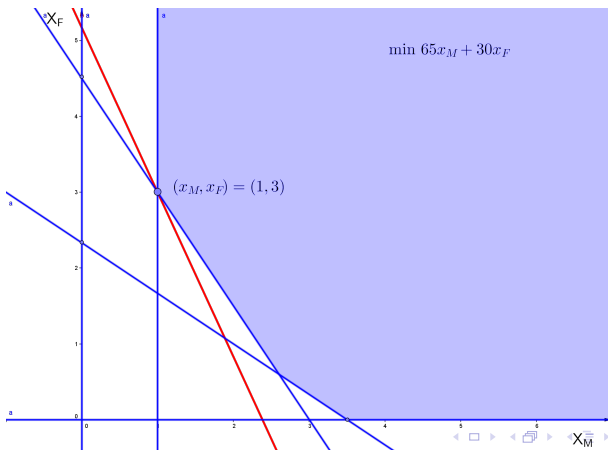


Problema da mistura - Ração



Problema da mistura - Ração

Custo Mínimo da Mistura $f^* = 155$ e devemos misturar 1kg de milho e 3kg de farinha de osso.



OUTRAS APLICAÇÕES - Ligas metálicas

- Ligas metálicas são produzidas a partir de vários insumos (lingotes de ferro, grafite, sucatas industriais, entre outros).
- Cada insumo tem uma composição (quantidades de carbono, silício, manganês etc) e custo conhecidos.
- A composição da liga é determinada por normas técnicas da metalurgia (quantidades de carbono, silício, manganês etc).
- Deseja-se determinar as quantidades de cada insumo a serem fundidas, satisfazendo as normas técnicas da metalurgia com o menor preço final possível.

OUTRAS APLICAÇÕES - Composição de areias para filtro

- Areias são usadas na constituição de filtros de Estações de Tratamento de Águas de abastecimento;
- Diferentes tipos de areias com composições granulométricas distintas estão disponíveis em vários locais;
- Custos de dragagem, transporte, seleção e preparo para utilização de cada areia variam;
- Areias devem ser dispostas em camadas que devem obedecer composições granulométricas estabelecidas por norma;
- O problema consiste em combinar os volumes de areia provenientes de cada local de modo a atender às especificações da norma, com o menor custo possível.

Problema de planejamento da produção - mix de produção

O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO

O Problema de Produção

- Função objetivo – maximizar a margem de contribuição dos produtos;
- Primeiro conjunto de restrições – fabricação dos produtos deve levar em conta a capacidade limitada dos recursos;
- Segundo conjunto de restrições – quantidade de produtos produzida não deve ser inferior à mínima e nem superior à máxima preestabelecida.

Exemplo 1 - Problema de Produção

- Uma padaria produz dois tipos de produtos: pão (P_1) e massa de pizza (P_2).
- Quatro diferentes matérias primas são utilizadas para a fabricação destes produtos: farinha (M_1), fermento (M_2), ovos (M_3) e manteiga (M_4), em que temos em estoque, respectivamente, 60 unidades, 30 unidades, 18 unidades e 55 unidades.
- Para produzir 1 kg de pão são necessárias 1 un. de farinha, 2 un. de fermento e 3 un. de manteiga.
- Para produzir 1 kg de massa de pizza são necessárias 3 un. de farinha, 1 un. de ovo e 1 un. de manteiga.

Exemplo 1 - Problema de Produção

- O pão e massa de pizza são vendidos ao custo de R\$ 22/Kg e R\$20/Kg.
- Deseja-se determinar a quantidade de cada produto a ser fabricada que maximize as vendas e respeite as restrições de estoque.

Matéria prima	Produto		Estoque
	P_1	P_2	
Farinha	1	3	60
Fermento	2	0	30
Ovos	0	1	18
Manteiga	3	1	55
Preço (R\$/kg)	22	20	

Exemplo 1 - Problema de Produção

- O que devemos decidir?
- Decisões: Denominadas Variáveis de decisão.
- Definindo
- x_1 = quantidade produzida de pão em kilos.
- x_2 = quantidade produzida de pizza em kilos.

Modelagem do Exemplo 1 - Problema de Produção

Modelo Matemático:

$$\max f(x_1, x_2) = 22x_1 + 20x_2$$

$$1x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$2x_1 + 0x_2 \leq 30$$

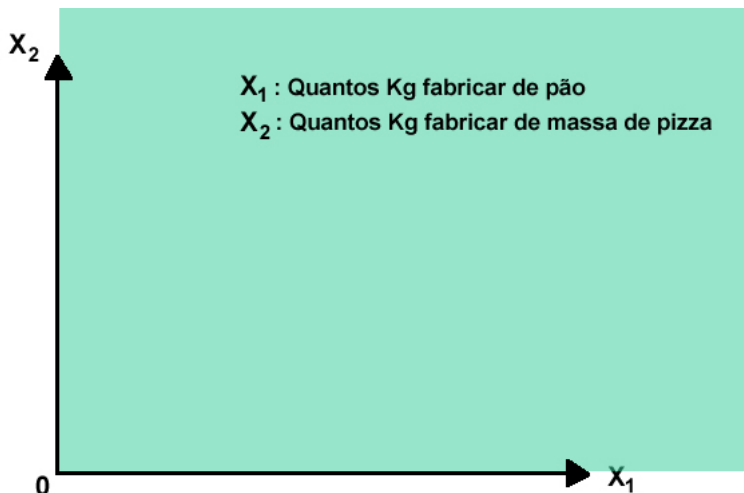
$$0x_1 + 1x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + 1x_2 \leq 55$$

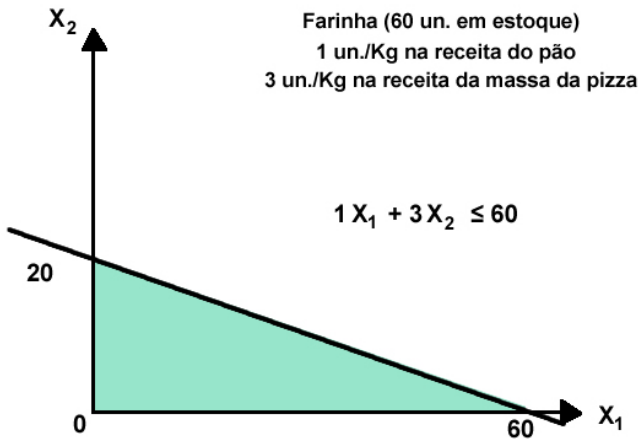
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

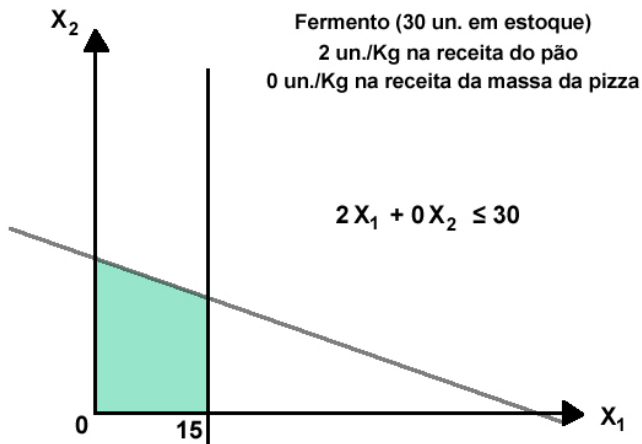
Exemplo 1 - Problema de Produção



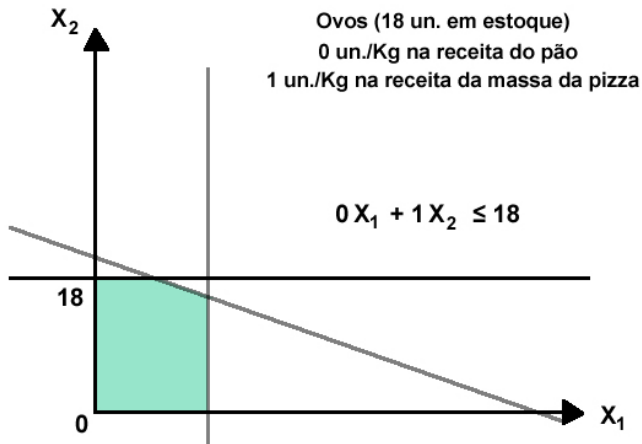
Exemplo 1 - Problema de Produção



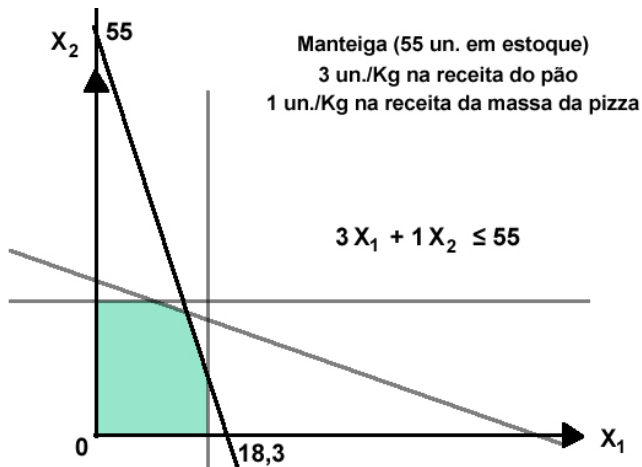
Exemplo 1 - Problema de Produção



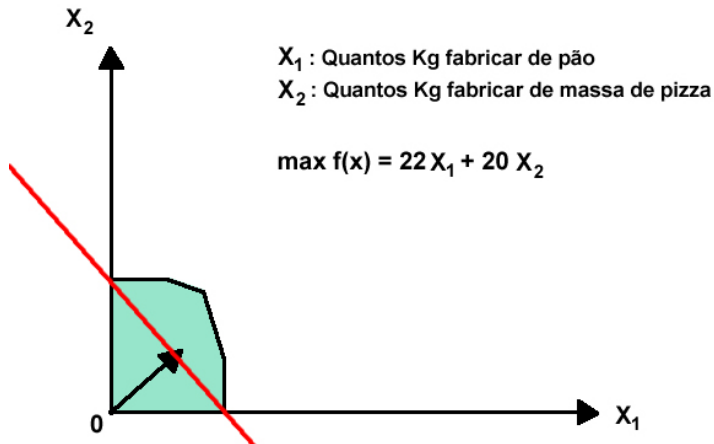
Exemplo 1 - Problema de Produção



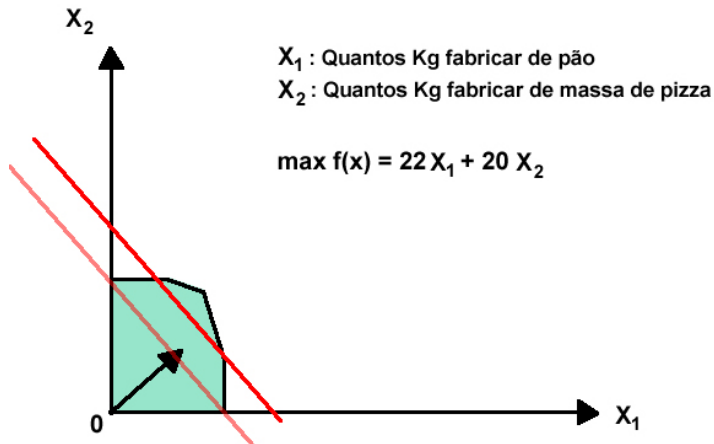
Exemplo 1 - Problema de Produção



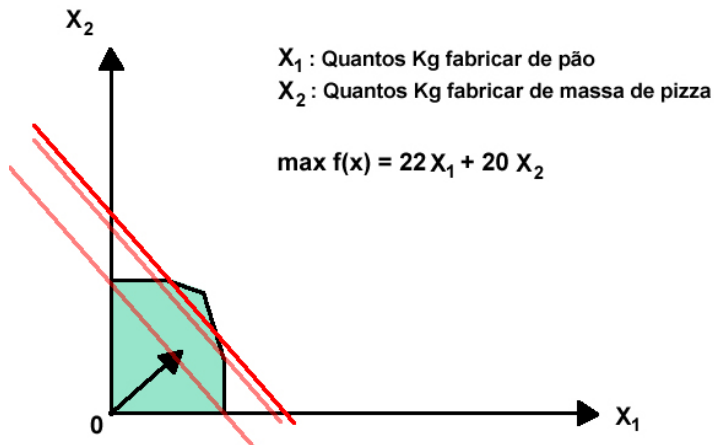
Exemplo 1 - Problema de Produção



Exemplo 1 - Problema de Produção

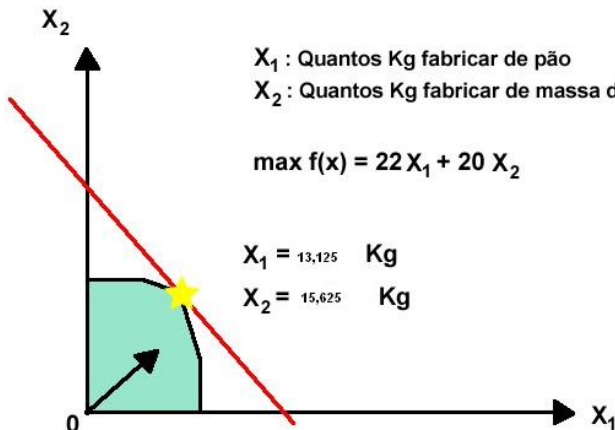


Exemplo 1 - Problema de Produção



Exemplo 1 - Problema de Produção

Lucro total = 601.25



X_1 : Quantos Kg fabricar de pão

X_2 : Quantos Kg fabricar de massa de pizza

$$\max f(x) = 22 X_1 + 20 X_2$$

$$X_1 = 13,125 \quad \text{Kg}$$

$$X_2 = 15,625 \quad \text{Kg}$$

Exemplo 2 - Produção de geladeiras

- Empresa precisa decidir quais modelos de geladeira instalar em sua nova planta;
- Dois possíveis modelos: luxo e básico.
- No máximo, 1500 unidades do modelo luxo e 6000 unidades do modelo básico podem ser vendidas por mês.
- Empresa contratou 25000 homens-hora de trabalho por mês;
- Os modelos luxos precisam de 10 homens-hora de trabalho para serem produzidos e os modelos básicos, 8 homens-hora.
- A capacidade da linha de montagem é de 4500 geladeiras por mês, pois as geladeiras dividem a mesma linha;
- O lucro unitário do modelo luxo é \$100,00 por mês, enquanto o modelo básico lucra \$50,00 durante o mesmo período.

Exemplo 2 - Produção de geladeiras

- **Objetivo:** determinar quanto produzir de cada geladeira, de modo a satisfazer todas as restrições e maximizar o lucro da empresa.

Variáveis de decisão:

x_1 = quantidade de geladeiras do modelo luxo a ser produzida por mês.

x_2 = quantidade de geladeiras do modelo básico a ser produzida por mês.

Modelo Matemático

Modelo Matemático:

$$\max f(x_1, x_2) = 100x_1 + 50x_2$$

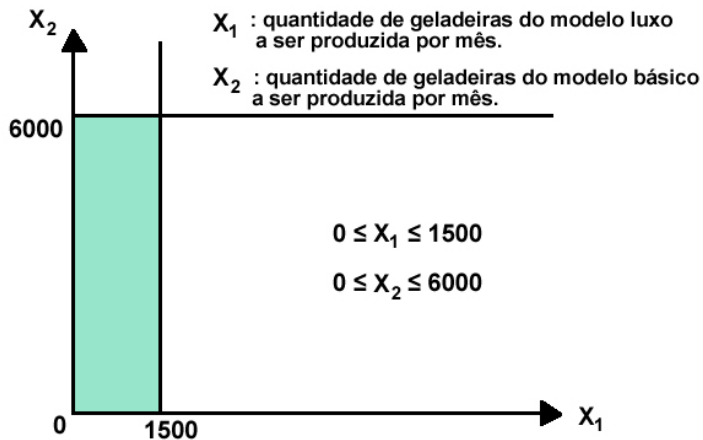
$$10x_1 + 8x_2 \leq 25000$$

$$x_1 + x_2 \leq 4500$$

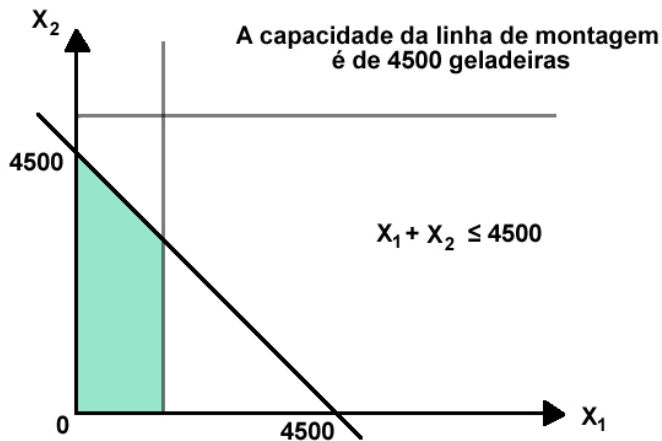
$$0 \leq x_1 \leq 1500$$

$$0 \leq x_2 \leq 6000.$$

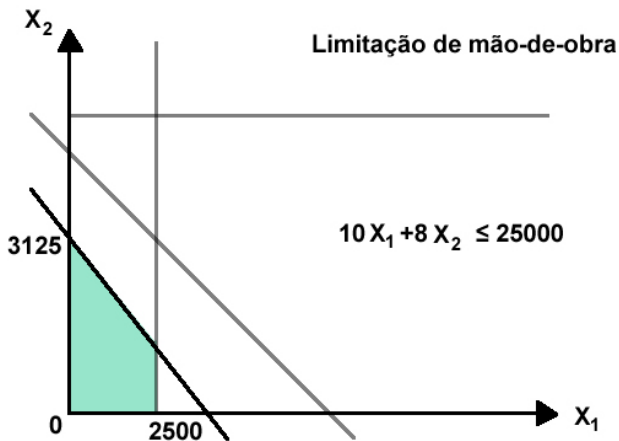
Exemplo 2 - Problema de Produção



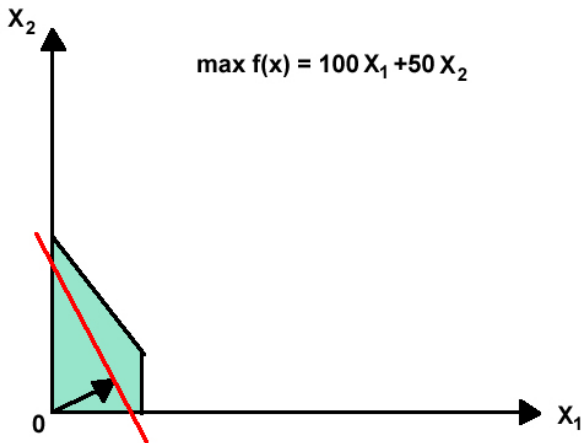
Exemplo 2 - Problema de Produção



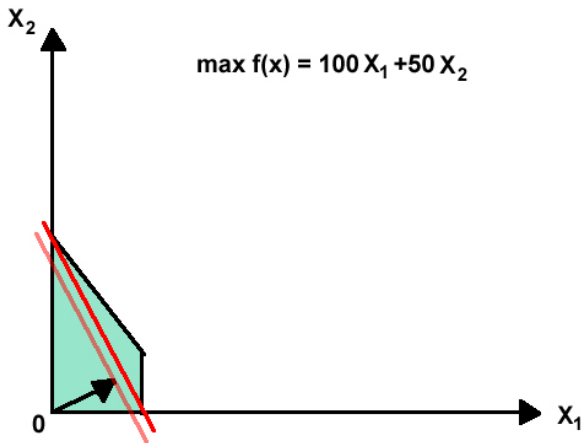
Exemplo 2 - Problema de Produção



Exemplo 2 - Problema de Produção

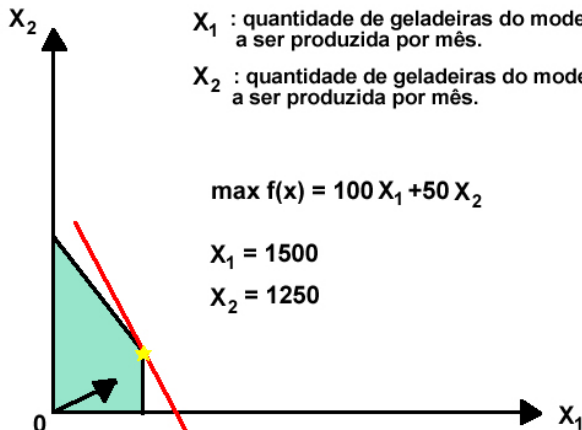


Exemplo 2 - Problema de Produção



Exemplo 2 - Problema de Produção

$$f^* = \text{R\$ } 212500$$



X_1 : quantidade de geladeiras do modelo luxo a ser produzida por mês.

X_2 : quantidade de geladeiras do modelo básico a ser produzida por mês.

$$\max f(x) = 100 X_1 + 50 X_2$$

$$X_1 = 1500$$

$$X_2 = 1250$$

Referências Bibliográficas

- ARENALES, M.; ARMENTANO, V. A.; MORABITO, R.; YANASSE, H. H. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Campus/elsevier, 2007. 523 p. ISBN 10-85-352-145-1454-2.
- GOLDBARG, M.; LUNA, H. P. L.; **Otimização Combinatória e Programação Linear**. Campus, 2000.
- MACHADO, A. **Notas de Aula do Prof. Alysson Machado Costa do Curso Introdução a Pesquisa Operacional**, 2008.
- NASCIMENTO, M.C.V.; ALÉM JUNIOR, D.J; CHERRI, L.H.; MASSAMITSU, F. **Apresentações para aulas de modelagem matemática**. São Carlos: ICMC-USP, 2008.
- PERIN, C. **Introdução à Programação Linear**. Coleção Imecc - Textos Didáticos. V.2. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2001. 177p.
- Silva, M.S., Ferreira, L.P., Reis, M.L. e Aragão, M.V.S.P. **Modelo para o planejamento tático integrado da produção e distribuição de papel e celulose**, Anais SBPO, 2011.