Análise de sensibilidade local

Marina Andretta

ICMC-USP

29 de novembro de 2016

Baseado no livro Introduction to Linear Optimization, de D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis.

Análise de sensibilidade

Considere o problema de programação linear na forma padrão

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x \\ \text{sujeita a} & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

e seu dual

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & p^T b \\ \text{sujeita a} & p^T A \leq c^T. \end{array}$$

Vamos estudar agora a dependência que o custo ótimo e a solução ótima têm dos parâmetros A, b e c.

Isso é importante porque, na prática, muitas vezes não temos toda informação sobre o problema que queremos resolver e queremos prever o que acontece quando alguns parâmetros mudam.

Muitos dos resultados que veremos a seguir podem ser estendidos para problemas de programação linear gerais. No entanto, por simplicidade, consideraremos apenas problemas na forma padrão, para os quais as linhas de A são linearmente independentes.

Considere que temos um problema programação linear. Suponha que dispomos de uma base B associada a uma solução ótima x^*.

Suponha que alguma entrada de A, b ou c tenha sido modificada ou que uma nova restrição ou variável tenha sido introduzida.

Veremos que condições devem ser satisfeitas para que a base B ainda seja ótima.

Se as condições não são satisfeitas, definiremos um algoritmo para encontrar a nova solução ótima sem ter de resolver o problema do início.

Veremos que o Método Simplex será útil para isso.

Análise de sensibilidade local

Como B é uma base ótima para o problema original, temos que as condições

$$B^{-1}b \geq 0 \qquad \text{(viabilidade)}$$

e

$$c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0^T \qquad \text{(otimalidade)}$$

são satisfeitas.

Análise de sensibilidade local

Quando o problema é modificado, verificaremos como essas duas condições são afetadas.

Ao pedir que essas duas condições (viabilidade e otimalidade) sejam satisfeitas para o problema modificado, obtemos condições para que a base B seja ótima para o problema modificado.

Inclusão de uma nova variável

Suponha que incluímos uma nova variável x_{n+1}, com uma nova coluna correspondente A_{n+1}, ao problema original.

Temos então o problema modificado

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x + c_{n+1} x_{n+1} \\ \text{sujeita a} & Ax + A_{n+1} x_{n+1} = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Queremos determinar se a base B ainda é ótima para este problema.

Inclusão de uma nova variável

Note que $(x, x_{n+1}) = (x^*, 0)$ é uma solução básica viável para o novo problema associada à base B. Então, precisamos analisar apenas as condições de otimalidade.

Para que a base B continue ótima, é necessário e suficiente que o custo reduzido de x_{n+1} seja não-negativo. Ou seja,

$$\bar{c}_{n+1} = c_{n+1} - c_B^T B^{-1} A_{n+1} \geq 0^T.$$

Se esta condição é satisfeita, $(x^*, 0)$ é uma solução ótima do novo problema.

Inclusão de uma nova variável

No entanto, se $\bar{c}_{n+1} < 0$, $(x^*, 0)$ não é uma solução ótima do novo problema.

Para encontrar uma solução ótima, acrescentamos uma coluna, associada à nova variável, ao tableau e aplicamos o algoritmo Simplex primal, partindo da base B.

Tipicamente, uma solução para o novo problema é encontrada em um número pequeno de iterações e esta abordagem é mais eficiente do que começar a resolução do novo problema do início.

Exemplo 1

Considere o problema de programação linear

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \text{minimizar} & -5x_1 & - & x_2 & + & 12x_3 & & & & \\ \text{sujeita a} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 10, \\ & 5x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & = & 16, \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

Uma solução ótima para este problema é $x = (2, 2, 0, 0)$ e o tableau correspondente é

		x_1	x_2	x_3	x_4
	12	0	0	2	7
$x_1 =$	2	1	0	-3	2
$x_2 =$	2	0	1	5	-3

Exemplo 1

Como as duas últimas colunas de A formam uma matriz identidade, a matriz B^{-1} é dada pelas duas últimas colunas do tableau.

Vamos introduzir ao problema uma nova variável x_5:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\text{minimizar} & -5x_1 & - & x_2 & + & 12x_3 & & & - & x_5 & & \\
\text{sujeita a} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 10, \\
 & 5x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 16, \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0,
\end{array}
$$

Exemplo 1

Temos que $A_5 = (1, 1)$ e

$$\bar{c}_5 = c_5 - c_B^T B^{-1} A_5 = -1 - (-5 \quad -1) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4.$$

Como $\bar{c}_5 < 0$, o ponto $(x^*, 0) = (2, 2, 0, 0, 0)$ não é ótimo.

Exemplo 1

Vamos então calcular $B^{-1}A_5$ e acrescentar uma coluna ao tableau associada à variável x_5:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	12	0	0	2	7	-4
$x_1 =$	2	1	0	-3	2	-1
$x_2 =$	2	0	1	5	-3	2

Aplicando o Simplex, temos que x_5 deve entrar na base e x_2 deve sair.

Exemplo 1

Atualizando o tableau, temos

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	16	0	2	12	1	0
$x_1 =$	3	1	0.5	-0.5	0.5	0
$x_5 =$	1	0	0.5	2.5	-1.5	1

Ou seja, chegamos a uma solução ótima para o problema modificado, dada por $x = (3, 0, 0, 0, 1)$, com custo -16.

Inclusão de uma nova restrição de desigualdade

Analisemos agora o caso em que uma nova restrição de desigualdade $a_{m+1}^T x \geq b_{m+1}$ é introduzida ao problema.

Se a solução ótima x^* do problema original satisfaz essa nova restrição, x^* é uma solução ótima para o novo problema.

Se a nova restrição é violada por x^*, introduzimos uma variável de folga não-negativa x_{n+1} e reescrevemos a nova restrição como $a_{m+1}^T x - x_{n+1} = b_{m+1}$.

Inclusão de uma nova restrição de desigualdade

Temos, então, um problema na forma padrão, com a matriz A substituída por

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ a_{m+1}^T & -1 \end{pmatrix}.$$

Seja B uma base ótima para o problema original. Podemos construir uma base para o novo problema selecionando as variáveis básicas e x_{n+1}.

Inclusão de uma nova restrição de desigualdade

A nova matriz base $\bar{B}$ tem a forma

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ a^T & -1 \end{pmatrix},$$

na qual a^T contém os componentes de a_{m+1}^T associados às colunas básicas originais.

Como o determinante desta matrix $\bar{B}$ é o negativo do determinante de B (que é não-nulo), temos que $\bar{B}$ de fato é uma base.

Inclusão de uma nova restrição de desigualdade

A solução básica associada a esta base é $(x^*, a_{m+1}^T x^* - b_{m+1})$.

Como x^* viola a restrição $a_{m+1}^T x \geq b_{m+1}$, esta solução básica é inviável.

Note que a inversa da nova matriz base é

$$\bar{B}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ a^T B^{-1} & -1 \end{pmatrix},$$

então ela é facilmente calculada.

Inclusão de uma nova restrição de desigualdade

Seja c_B o vetor m-dimensional com os custos das variáveis básicas originais.

Então, o vetor de custos reduzidos associado à base $\bar{B}$ para o novo problema é dado por

$$(c^T \quad 0) - (c_B^T \quad 0) \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ a^T B^{-1} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ a_{m+1}^T & -1 \end{pmatrix} = (c^T - c_B^T B^{-1} A \quad 0).$$

Como B é uma base ótima do problema original, estes custos reduzidos são não-negativos.

Inclusão de uma nova restrição de desigualdade

Portanto, $\bar{B}$ é uma base viável dual e podemos aplicar o Método Simplex dual a este novo problema.

Note que um tableau para o novo problema pode ser facilmente construído.

Por exemplo, temos que

$$\bar{B}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ a_{m+1}^T & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}A & 0 \\ a^T B^{-1} A - a_{m+1}^T & 1 \end{pmatrix},$$

e $B^{-1}A$ está disponível no tableau final do problema original.

Exemplo 2

Considere o mesmo problema do Exemplo 1

$$
\begin{array}{llcrcrcrcl}
\text{minimizar} & -5x_1 & - & x_2 & + & 12x_3 & & & & \\
\text{sujeita a} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 10, \\
 & 5x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & = & 16, \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

e o tableau ótimo

		x_1	x_2	x_3	x_4
	12	0	0	2	7
$x_1 =$	2	1	0	-3	2
$x_2 =$	2	0	1	5	-3

Exemplo 2

Vamos adicionar a restrição $x_1 + x_2 \geq 5$, que é violada pela solução ótima do problema original $x^* = (2, 2, 0, 0)$.

Temos que $a_{m+1} = a_3 = (1, 1, 0, 0)$, $b_{m+1} = b_3 = 5$ e $a_{m+1}^T x^* < b_{m+1}$.

Construímos o problema modificado, na forma padrão,

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\text{minimizar} & -5x_1 & - & x_2 & + & 12x_3 & & & & & & \\
\text{sujeita a} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 10, \\
 & 5x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & & & = & 16, \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 5, \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Exemplo 2

Seja a vetor das componentes de a_{m+1} correspondentes às variáveis básicas. Ou seja, $a = (1, 1)$.

Temos, então,

$$a^T B^{-1} A - a_{m+1}^T = (1 \ \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} - (1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0) = (0 \ \ 0 \ \ 2 \ \ -1).$$

Exemplo 2

O tableau para o novo problema é

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	12	0	0	2	7	0
$x_1 =$	2	1	0	-3	2	0
$x_2 =$	2	0	1	5	-3	0
$x_3 =$	-1	0	0	2	-1	1

Temos agora toda informação necessária para aplicar o Método Simplex dual ao novo problema.

Inclusão de uma nova restrição de desigualdade

Discutimos o caso em que uma restrição de desigualdade é inserida no problema primal.

Se introduzimos uma restrição de desigualdade $p^T A_{n+1} \leq c_{n+1}$ ao problema dual, isso é equivalente a introduzir uma nova variável ao problema primal, que é o caso discutido anteriormente.

Inclusão de uma nova restrição de igualdade

Vejamos agora o que acontece quando uma nova restrição de igualdade $a_{m+1}^T x = b_{m+1}$, que não é satisfeita pela solução ótima x^* do problema original, é introduzida.

O dual do novo problema é dado por

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & p^T b + p_{m+1} b_{m+1} \\ \text{sujeita a} & (p^T \;\; p_{m+1}) \begin{pmatrix} A \\ a_{m+1}^T \end{pmatrix} \leq c^T, \end{array}$$

com p_{m+1} a variável dual associada à nova restrição.

Inclusão de uma nova restrição de igualdade

Seja p^* uma solução básica viável ótima do dual do problema original. Então, $(p^*, 0)$ é uma solução viável do novo problema dual.

Seja m a dimensão de p, que é o número de restrições do problema original.

Como p^* é uma solução básica viável do dual do problema original, m das restrições $(p^*)^T A \leq c^T$ são ativas e linearmente independentes.

No entanto, não há garantia que $(p^*, 0)$ tenha $m + 1$ restrições ativas linearmente independentes no dual do novo problema.

De fato, $(p^*, 0)$ não é necessariamente uma solução básica viável do dual do novo problema e, por isso, pode não ser um ponto inicial conveniente para usar o Método Simplex dual na resolução do novo problema.

Inclusão de uma nova restrição de igualdade

Apesar de poder ser possível obter uma solução básica viável para o dual do novo problema definindo p_{m+1} como um valor não-nulo adequado, veremos uma forma alternativa para calcular um ponto inicial para que o Método Simplex dual possa ser usado para resolver o novo dual.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $a_{m+1}^T x > b_{m+1}$. Definimos o problema primal auxiliar

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{minimizar} & c^T x & + & M x_{n+1} & & \\
\text{sujeita a} & Ax & & & = & b, \\
 & a_{m+1}^T x & - & x_{n+1} & = & b_{m+1}, \\
 & x \geq 0, & & x_{n+1} & \geq & 0,
\end{array}
$$

com M uma constante dada positiva.

Inclusão de uma nova restrição de igualdade

Para obter uma base viável primal para o problema auxiliar, selecionamos as variáveis básicas da solução ótima do problema original e a variável x_{n+1}.

A matriz base é a mesma matriz $\bar{B}$ definida para o caso em que uma restrição de desigualdade é acrescentada no problema.

A única diferença de $\bar{B}$ naquele caso e neste é que, para o caso em que uma restrição de desigualdade é introduzida, $\bar{B}$ é uma base para o novo problema dual, enquanto que aqui ela é uma base viável primal.

Por isso, o Método Simplex primal pode ser usado para resolver o problema auxiliar.

Inclusão de uma nova restrição de igualdade

Suponha que tenhamos calculado uma solução ótima para o problema auxiliar que satisfaz $x_{n+1} = 0$ (o que acontece se o novo problema é viável e M é suficientemente grande).

Neste caso, a restrição adicional $a_{m+1}^T x = b_{m+1}$ é satisfeita e temos uma solução para o novo problema.

Mudanças no vetor b

Suponha, agora, que uma componente de b tenha sido trocada por $b_i + \delta$. Ou seja, o vetor b foi mudado para $b + \delta e_i$, com i a i-ésima coluna da identidade.

Queremos determinar os valores de δ para os quais a base atual (associada a x^*) é ótima.

Note que as condições de otimalidade não são afetadas pela mudança de b.

Então, precisamos analisar apenas o que acontece com a condição de viabilidade

$$B^{-1}(b + \delta e_i) \geq 0.$$

Mudanças no vetor b

Seja $g = (\beta_{1i}, \beta_{2i}, ..., \beta_{mi})$ a i-ésima coluna de B^{-1}.

Queremos então que

$$B^{-1}(b + \delta e_i) = B^{-1}b + \delta B^{-1}e_i = x_B + \delta g \geq 0,$$

ou

$$x_{B(j)} + \delta\beta_{ji} \geq 0, \quad \text{para } j = 1, ..., m.$$

Mudanças no vetor b

Ou seja, queremos que

$$\max_{\{j \mid \beta_{ji}>0\}} \left(-\frac{x_{B(j)}}{\beta_{ji}} \right) \leq \delta \leq \min_{\{j \mid \beta_{ji}<0\}} \left(-\frac{x_{B(j)}}{\beta_{ji}} \right).$$

Para valores de δ neste intervalo, o custo ótimo, como uma função de δ, é dado por

$$c_B^T B^{-1}(b + \delta e_i) = p^T b + \delta p_i,$$

com $p^T = c_B^T B^{-1}$ a solução dual ótima associada à base ótima B.

Exemplo 3

Considere o tableau ótimo do Exemplo 1:

		x_1	x_2	x_3	x_4
	12	0	0	2	7
$x_1 =$	2	1	0	-3	2
$x_2 =$	2	0	1	5	-3

Vamos analisar o que acontece que desejamos somar δ a b_1.

Exemplo 3

A primeira coluna de B^{-1} é $(-3, 5)$. As variáveis básicas, nesta mesma base, são $x_1 = 2 - 3\delta$ e $x_2 = 2 + 5\delta$.

Esta base se manterá viável se $2 - 3\delta \geq 0$ e $2 + 5\delta \geq 0$. Ou seja, se $-2/5 \leq \delta \leq 2/3$.

A razão de mudança do custo ótimo por unidade de mudança de δ é dada por $c_B^T B^{-1} e_1 = (-5, -1)^T(-3, 5) = 10$.

Note que, se δ aumenta mais do que $2/3$, x_1 se torna negativa. Neste caso, podemos realizar uma iteração do Método Simplex dual para remover x_1 da base (e x_3 entra em seu lugar).

Mudanças no vetor de custos c

Suponha agora que um elemento j do vetor de custos c se torne $c_j + \delta$. Vamos analisar que condições δ deve satisfazer para que a solução do problema original continue ótima.

Como a viabilidade no primal não muda com a alteração de c, precisamos analisar apenas o que acontece com a condição de otimalidade

$$c_B^T B^{-1} A \leq c^T.$$

Mudanças no vetor de custos c

Se c_j é o coeficiente de custo de uma variável não-básica x_j, c_B não muda e a única desigualdade que é afetada é a associada ao custo reduzido de x_j.

Queremos que

$$c_B^T B^{-1} A_j \leq c_j + \delta,$$

ou

$$\delta \geq -\bar{c}_j.$$

Se esta condição vale, a base associada a x^* ainda é ótima. Caso contrário, podemos aplicar o Método Simplex primal começando com x^* e a base B.

Mudanças no vetor de custos c

Se c_j é o coeficiente de custo de uma variável básica $x_{B(\ell)}$ (ou seja, $j = B(\ell)$), c_B é mudado para $c_B + \delta e_\ell$ e todas as condições de otimalidade são alteradas.

As condições de otimalidade para o novo problema são

$$(c_B + \delta e_\ell)^T B^{-1} A_i \leq c_i, \quad \forall i \neq j,$$

já que x_j é uma variável básica e seu custo reduzido se mantém nulo e não precisa ser analisado.

Estas condições podem ser escritas como

$$\delta q_{\ell i} \leq \bar{c}_i, \quad \forall i \neq j,$$

com $q_{\ell i}$ a ℓ-ésima componente de $B^{-1}A_i$, que pode ser obtida pelo tableau.

Estas desigualdades determinam o intervalo de valores de δ para os quais a base se mantém ótima.

Exemplo 4

Considere novamente o problema do Exemplo 1. O tableau ótimo calculado é

		x_1	x_2	x_3	x_4
	12	0	0	2	7
$x_1 =$	2	1	0	-3	2
$x_2 =$	2	0	1	5	-3

Vamos determinar intervalos de valores δ_i a serem somados a c_i de modo que a base ótima encontrada para o problema original continue ótima.

Exemplo 4

Se queremos somar δ_3 e δ_4 a c_3 e c_4, respectivamente, como x_3 e x_4 são variáveis não-básicas na solução, temos as condições

$$\delta_3 \geq -\bar{c}_3 = -2,$$

$$\delta_4 \geq -\bar{c}_4 = -7.$$

Exemplo 4

Se queremos somar δ_1 a c_1, como x_1 é uma variável básica, precisamos analisar as condições

$$\delta_1 q_{1i} \leq \bar{c}_i, \quad \forall i \neq 1.$$

Pelo tableau, temos $q_{12} = 0$, $q_{13} = -3$ e $q_{14} = 2$. Portanto,

$$\delta_1 q_{12} \leq \bar{c}_2 \Rightarrow 0\delta_1 \leq 0,$$

$$\delta_1 q_{13} \leq \bar{c}_3 \Rightarrow -3\delta_1 \leq 2 \Rightarrow \delta_1 \geq -2/3,$$

$$\delta_1 q_{14} \leq \bar{c}_4 \Rightarrow 3\delta_1 \leq 7 \Rightarrow \delta_1 \leq 7/2.$$

Mudanças em uma coluna não-básica de A

Suponha que estejamos interessados em trocar uma entrada de a_{ij} da j-ésima coluna A_j de A por $a_{ij} + \delta$. Queremos determinar o intervalo de valores de δ para os quais a base ótima do problema original se mantém a mesma.

Se a coluna A_j é não-básica, a matriz B não muda e a condição de viabilidade primal não muda.

Mudanças em uma coluna não-básica de A

Além disso, somente o custo reduzido da j-ésima coluna é afetada, o que leva à condição

$$c_j - p^T(A_j + \delta e_i) \geq 0,$$

ou

$$\bar{c}_j - \delta p_i \geq 0,$$

com $p^T = c_B^T B^{-1}$.

Se esta condição não é satisfeita, a coluna não-básica A_j pode ser colocada na base e podemos continuar com o Método Simplex primal.

Mudanças em uma coluna básica de A

Se uma das entradas de uma coluna básica A_j muda, tanto as condições de viabilidade como as de otimalidade são afetadas.

Exercício: escreva as condições para que a base ótima continue a mesma para este caso.