Representação de poliedros

Marina Andretta

ICMC-USP

8 de novembro de 2016

Baseado no livro Introduction to Linear Optimization, de D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis.

Representação de poliedros

Vamos agora apresentar um dos resultados fundamentais da teoria de programação linear: todo elemento de um poliedro que tem pelo menos um ponto extremo pode ser representado pela combinação convexa de pontos extremos somado a uma combinação linear não-negativa de raios extremos.

Teorema 1. *Seja* $P = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax \geq b\}$ *um poliedro não-vazio com pelo menos um ponto extremo. Sejam* $x^1, ..., x^k$ *os pontos extremos e* $w^1, ..., w^r$ *um conjunto completo de raios extremos de* P*. Seja*

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{r} \theta_j w^j \mid \lambda_i \geq 0,\ \theta_j \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Então, $Q = P$*.*

Prova do Teorema 1

Prova: Primeiramente, vamos mostrar que $Q \subset P$.

Seja

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{r} \theta_j w^j$$

um elemento de Q, com os coeficientes λ_i e θ_j não-negativos e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

O vetor $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$ é uma combinação convexa de elementos de P. Portanto, y pertence a P e satisfaz $Ay \geq b$. Também temos que $Aw^j \geq 0$ para todo j, o que implica que o vetor $z = \sum_{j=1}^{r} \theta_j w^j$ satisfaz $Az \geq 0$.

Assim, $x = z + y$ satisfaz $Ax \geq b$ e pertence a P.

Prova do Teorema 1

Agora, vamos mostrar que $P \subset Q$.

Suponha, por absurdo, que $P \not\subset Q$. Seja z um elemento de P que não pertence a Q.

Considere o problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \sum_{i=1}^{k} 0\lambda_i + \sum_{j=1}^{r} 0\theta_j \\ \text{sujeita a} & \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{r} \theta_j w^j = z, \\ & \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \\ & \qquad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, ..., k, \\ & \qquad \theta_i \geq 0, \quad i = 1, ..., r. \end{array}$$

Prova do Teorema 1

Sabemos que este problema é inviável, porque $z \notin Q$.

Seu dual é dado por

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar} & p^T z + q & \\ \text{sujeita a} & p^T x^i + q \geq 0, & i = 1, ..., k, \\ & \quad\; p^T w^j \geq 0, & i = 1, ..., r. \end{array}$$

Como este problema tem solução viável (por exemplo, $p = 0$ e $q = 0$), o custo ótimo é $-\infty$ e existe alguma solução viável (p, q) cujo custo $p^T z + q$ é negativo.

Por outro lado, $p^T x^i + q \geq 0$ para todo i. Ou seja, $p^T z < p^T x^i$ para todo i. Também temos que $p^T w^j \geq 0$ para todo j.

Prova do Teorema 1

Fixando este p, considere o problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & p^T x \\ \text{sujeita a} & Ax \geq b. \end{array}$$

Se o custo ótimo deste problema é finito, existe um ponto extremo x^i que é ótimo. Como z é uma solução viável, temos que $p^T x^i \leq p^T z$, o que é uma contradição.

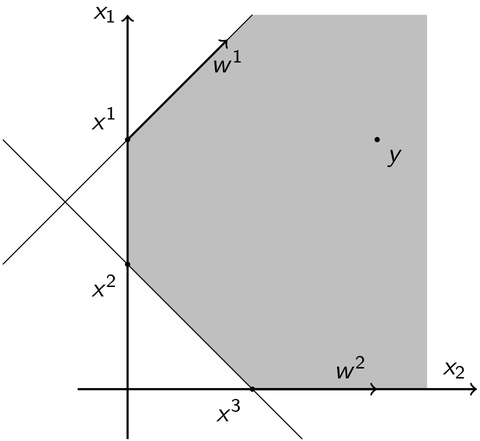
Se o custo ótimo deste problema é $-\infty$, o Teorema 3 da aula sobre "Cones e raios extremos" diz que existe um raio extremo w^j tal que $p^T w^j < 0$, o que também é uma contradição.

Portanto, temos que $P \subset Q$. $\square$

Exemplo

Considere o poliedro ilimitado definido pelas restrições

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq -2, \\ x_1 + x_2 &\geq 1, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$



Exemplo

Este poliedro tem três pontos extremos: $x^1 = (0,2)$, $x^2 = (0,1)$ e $x^3 = (1,0)$.

O cone recessional C é descrito pelas desigualdades $d_1 - d_2 \geq 0$, $d_1 + d_2 \geq 0$, $d_1 \geq 0$ e $d_2 \geq 0$.

Portanto, $C = \{(d_1, d_2) \mid 0 \leq d_2 \leq d_1\}$.

Este cone tem dois raios extremos: $w^1 = (1,1)$ e $w^2 = (1,0)$.

Exemplo

O vetor $y = (2, 2)$ é um elemento do poliedro e pode ser representado por

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x^2 + w^1 + w^2.$$

No entanto, esta representação não é única. Por exemplo, temos

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}w^1 + \frac{3}{2}w^2.$$

Representação de poliedros

Note que o conjunto Q do Teorema 1 é a imagem do poliedro

$$H = \left\{ (\lambda_i, ..., \lambda_k, \theta_1, ..., \theta_r) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ \theta_j \geq 0 \right\}$$

sob a transformação linear

$$(\lambda_i, ..., \lambda_k, \theta_1, ..., \theta_r) \mapsto \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{r} \theta_j w^j.$$

Então, um corolário do Teorema 1 é que todo poliedro é a imagem, sob uma transformação linear, de um poliedro H com esta estrutura particular.

Se considerarmos apenas no caso de poliedros limitados, temos o corolário a seguir.

Corolário 1. *Um poliedro limitado não-vazio é o fecho convexo de seus pontos extremos.*

Prova: Seja $P = \{x \mid Ax \geq b\}$ um poliedro limitado não-vazio. Se d é um elemento não-nulo do cone $C = \{x \mid Ax \geq 0\}$ e x é um elemento de P, temos que $x + \lambda d \in P$, para todo $\lambda \geq 0$, contrariando o fato de P ser limitado.

Portanto, C contém apenas o vetor nulo e não tem raios extremos. Assim, pelo Teorema 1, temos que P é o fecho convexo de seus ponto extremos.
$\square$

Outro corolário do Teorema 1 trata do caso de cones, como visto a seguir.

Corolário 2. *Suponha que o cone* $C = \{x \mid Ax \geq 0\}$ *seja pontudo. Então, todo elemento de* C *pode ser escrito como uma combinação linear não-negativa dos raios extremos de* C*.*

Prova: Note que o único ponto extremo de C é o vetor nulo. Portanto, pelo Teorema 1, todo elemento de C pode ser escrito como uma combinação linear não-negativa dos raios extremos de C. $\square$

Representação de poliedros

Dizemos que um conjunto Q é finitamente gerado se ele é descrito da forma

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{r} \theta_j w^j \mid \lambda_i \geq 0,\ \theta_j \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}, \qquad (1)$$

com $x^1, ..., x^k$ e $w^1, ..., w^r$ vetores dados de $\boldsymbol{R}^n$.

O Teorema 1 afirma que um poliedro com pelo menos um ponto extremo é um conjunto finitamente gerado. Vamos discutir agora o resultado contrário, ou seja, que todo conjunto finitamente gerado é um poliedro.

Teorema 2. *Um conjunto gerado finitamente é um poliedro. Em particular, o fecho convexo de um número finito de vetores é um poliedro (limitado).*

Prova do Teorema 2

Prova: Considere o problema de programação linear

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximizar} & \sum_{i=1}^{k} 0\lambda_i + \sum_{j=1}^{r} 0\theta_j & \\
\text{sujeita a} & \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{r} \theta_j w^j = z, & \\
 & \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, & \\
 & \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, ..., k, & \\
 & \theta_i \geq 0, \quad i = 1, ..., r. &
\end{array} \tag{2}
$$

Um dado vetor z pertence a um conjunto finitamente gerado Q da forma (1) se, e somente se, o problema (2) tem alguma solução viável.

Prova do Teorema 2

Usando dualidade, temos que um vetor z pertence a um conjunto finitamente gerado Q da forma (1) se, e somente se, o problema dual

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & p^T z + q \\ \text{sujeita a} & p^T x^i + q \geq 0, \quad i = 1, ..., k, \\ & \qquad p^T w^j \geq 0, \quad i = 1, ..., r \end{array}$$

tem custo ótimo finito.

Prova do Teorema 2

Convertendo este problema dual para a forma padrão, temos

$$
\begin{array}{lrl}
\text{minimizar} & (p^+)^T z - (p^-)^T z + q^+ - q^- & \\
\text{sujeita a} & (p^+)^T x^i - (p^-)^T x^i + q^+ - q^- - s^1 = 0, & i = 1, ..., k, \\
& (p^+)^T w^j - (p^-)^T w^j - s^2 = 0, & i = 1, ..., r, \\
& p^+, p^-, q^+, q^-, s^1, s^2 \geq 0. &
\end{array}
$$

Como poliedros na forma padrão não contêm retas, o problema tem custo finito se, e somente se, $(p^+)^T z - (p^-)^T z + q^+ - q^- \geq 0$ para cada um dos finitos raios extremos.

Portanto, $z \in Q$ se, e somente se, z satisfaz uma coleção finita de desigualdades lineares. Portanto, Q é um poliedro. $\square$

Representação de poliedros

Portanto, temos duas maneiras de representar poliedros:

(a) por um conjunto finito de restrições lineares;

(b) por um conjunto finitamente gerado, em termos de pontos extremos e raios extremos.

Ambas as descrições são matematicamente equivalentes, mas podem ser muito diferentes de um ponto de vista prático.

Por exemplo, podemos ter um poliedro descrito por um número pequeno de restrições lineares, mas ter um grande número de pontos extremos. Assim, sua descrição como um conjunto finitamente gerado não é conveniente.