Cones e raios extremos

Marina Andretta

ICMC-USP

7 de novembro de 2016

Baseado no livro Introduction to Linear Optimization, de D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis.

Já vimos que se o custo ótimo de um problema de programação linear é finito, nossa busca pela solução ótima pode se restringir a um conjunto finito de pontos, formado pelas soluções básicas viáveis (quando alguma existe).

Agora, vamos ver um resultado parecido para o caso em que o custo ótimo é $-\infty$.

Cones

Em particular, vamos ver que o custo ótimo é $-\infty$ se, e somente se, existe uma direção de descida (ou seja, uma direção na qual o custo diminui) ao longo da qual podemos nos mover sem deixar o conjunto viável.

Além disso, nossa busca por tal direção pode ser restrita a um conjunto finito de direções, chamadas de raios extremos.

Cones

Definição 1. *Um conjunto* $C \subset \boldsymbol{R}^n$ *é um* cone *se* $\lambda x \in C$ *para todo* $\lambda \geq 0$ *e todo* $x \in C$*.*

Note que, se C é um cone não-vazio, então $0 \in C$.

É fácil ver que um poliedro da forma $\{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax \geq 0\}$ é um cone não-vazio. Ele é chamado de cone poliédrico.

Cones

Seja x um elemento não-nulo de um cone poliédrico C. Temos então que $\frac{3}{2}x \in C$ e $\frac{1}{2}x \in C$.

Como x é a média de $\frac{3}{2}x \in C$ e $\frac{1}{2}x \in C$, x não é um ponto extremo de C.

Portanto, o único ponto extremo possível para este cone C é o vetor nulo.

Quando o vetor nulo de fato é um ponto extremo de C, dizemos que o cone é pontudo.

Teorema 1. *Seja $C \subset \boldsymbol{R}^n$ um cone poliédrico definido pelas restrições $a_i^T x \geq 0$, $i = 1, ..., m$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *O vetor nulo é um ponto extremo de C.*

(b) *O cone C não contém uma reta.*

(c) *Existem n vetores da família $a_1, ..., a_m$ que são linearmente independentes.*

Prova: Este é um caso particular do Teorema 1 da aula sobre "Existência e otimalidade de pontos extremos".

Raios e cones recessionais

Considere o poliedro não-vazio $P = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax \geq b\}$ e fixe um ponto $y \in P$.

Definimos um cone recessional em y como o conjunto de todas as direções d ao longo das quais podemos nos mover indefinidamente para longe de y sem sair de P.

Formalmente, o cone recessional é definido como o conjunto

$$\{d \in \boldsymbol{R}^n \mid A(y + \lambda d) \geq b, \text{para todo } \lambda \geq 0\}.$$

Raios e cones recessionais

Note que este conjunto é o mesmo que

$$\{d \in \boldsymbol{R}^n \mid Ad \geq 0\},$$

que é um cone poliédrico.

Isso mostra que o cone recessional é independente do ponto y.

Raios e cones recessionais

Os elementos não-nulos do cone recessional são chamados de raios do poliedro P.

Para o caso de um poliedro não-vazio na forma padrão $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, \ x \geq 0\}$, o cone recessional é o conjunto de todos os vetores d que satisfazem

$$Ad = 0, \quad d \geq 0.$$

Vamos definir agora os raios extremos de um poliedro. Intuitivamente, eles são direções associadas a "arestas" do poliedro que se estendem ao infinito.

Definição 2.

(a) *Um elemento não-nulo x de um cone poliédrico $C \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de raio extremo se há $n-1$ restrições linearmente independentes que são ativas em x.*

(b) *Um raio extremo do cone recessional associado a um poliedro não-vazio P também é chamado de raio extremo de P.*

Raios extremos

Note que um múltiplo positivo de um raio extremo também é um raio extremo.

Dizemos que dois raios extremos são equivalentes se um é um múltiplo positivo do outro.

Para que isso aconteça, eles devem corresponder às mesmas $n - 1$ restrições ativas linearmente independentes.

Raios extremos

Cada conjunto de $n-1$ restrições linearmente independentes define uma reta e pode levar a, no máximo, dois raios extremos não-equivalentes (com um o negativo do outro).

Dado que há um número finito de maneiras de escolher $n-1$ restrições para se tornarem ativas, e supondo que não fazemos distinção entre raios extremos equivalentes, concluímos que o número de raios extremos de um poliedro é finito.

Uma coleção finita de raios extremos será chamada de conjunto completo de raios extremos se ela contém exatamente um representante de cada classe de equivalência.

Caracterização de problemas de programação linear ilimitados

Vamos agora elaborar condições sob as quais o custo ótimo em um problema de programação linear é $-\infty$.

Teorema 2. *Considere o problema de minimizar* $c^T x$ *em um cone poliédrico pontudo* $C = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid a_i^T x \geq 0, i = 1, ..., m\}$. *O custo ótimo é* $-\infty$ *se, e somente se, algum raio extremo* d *de* C *satisfaz* $c^T d < 0$.

Prova do Teorema 2

Prova: Primeiramente, vamos mostrar que se algum raio extremo d de C satisfaz $c^T d < 0$ então o custo ótimo é $-\infty$.

Se d é um raio extremo de C, temos que todo ponto da forma αd, com $\alpha \geq 0$, é viável. Além disso, como $c^T d < 0$, quanto maior o valor de α, menor o custo $c^T(\alpha d) = \alpha c^T d < 0$. Portanto, o custo ótimo é $-\infty$.

Prova do Teorema 2

Vamos agora mostrar que se o custo ótimo é $-\infty$ então algum raio extremo d de C satisfaz $c^T d < 0$.

Suponha que custo ótimo é $-\infty$. Neste caso, existe algum $x \in C$ cujo custo é negativo. Escalando x de maneira adequada, podemos supor que $c^T x = -1$.

Assim, o poliedro

$$P = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid a_1^T x \geq 0, ..., a_m^T x \geq 0, \; c^T x = -1\}$$

é não-vazio.

Prova do Teorema 2

Como C é pontudo, os vetores $a_1, ..., a_m$ geram $\boldsymbol{R}^n$. Assim, temos que P tem pelo menos um ponto extremo. Seja d um ponto extremo de P.

Em d temos n restrições ativas linearmente independentes, o que significa que $n - 1$ restrições linearmente independentes da forma $a_i^T x \geq 0$ devem ser ativas. Portanto, d é um raio extremo de C. $\square$

Caracterização de problemas de programação linear ilimitados

Explorando dualidade, temos um critério de ilimitação para problemas de programação linear gerais, dado no teorema a seguir.

Teorema 3. *Considere o problema de minimizar* $c^T x$ *sujeita a* $Ax \geq b$ *e suponha que o conjunto viável tenha ao menos um ponto extremo. O custo ótimo é* $-\infty$ *se, e somente se, algum raio extremo* d *do conjunto viável satisfaz* $c^T d < 0$.

Prova do Teorema 3

Prova: Primeiramente, vamos mostrar que se algum raio extremo d do conjunto viável satisfaz $c^T d < 0$ então o custo ótimo é $-\infty$.

Como o conjunto viável tem ao menos um ponto extremo, ele é não-vazio. Considere x um ponto viável e suponha que algum raio extremo d do conjunto viável satisfaz $c^T d < 0$.

Como d é um raio extremo do conjunto viável, temos que d é um raio extremo do cone recessional associado ao conjunto viável. Ou seja, d satisfaz $Ad \geq 0$. Assim, como x é viável, $A(x + \alpha d) = Ax + \alpha Ad \geq b$ para qualquer $\alpha \geq 0$. Ou seja, para qualquer $\alpha \geq 0$, $x + \alpha d$ é viável. Já que o custo diminui sempre que α aumenta, temos que o custo ótimo é $-\infty$.

Agora vamos mostrar que se o custo ótimo é $-\infty$ então algum raio extremo d do conjunto viável satisfaz $c^T d < 0$.

Considere o problema dual

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & p^T b \\ \text{sujeita a} & p^T A = c^T, \\ & p \geq 0. \end{array}$$

Se o problema primal é ilimitado, o problema dual é inviável.

Prova do Teorema 3

Então, o problema

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & p^T 0 \\ \text{sujeita a} & p^T A = c^T, \\ & p \geq 0 \end{array}$$

também é inviável.

Portanto, o problema dual associado a este problema, dado por

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x \\ \text{sujeita a} & Ax \geq 0, \end{array}$$

é ilimitado ou inviável.

Prova do Teorema 3

Como $x = 0$ é uma solução deste problema, ele não é inviável e, então, é ilimitado.

Como o problema primal tem ao menos um ponto extremo, as linhas de A geram $\mathbb{R}^n$, com n a dimensão de x.

Assim, o cone recessional $\{x \mid Ax \geq 0\}$ é pontudo. Pelo Teorema 2, existe um raio extremo d do cone recessional que satisfaz $c^T d < 0$. Como, por definição, d é um raio extremo do conjunto viável, temos um raio extremo do conjunto viável que satisfaz $c^T d < 0$, como gostaríamos. $\square$

Critério de ilimitação no Método Simplex

Considere o que acontece quando o Método Simplex termina sua execução em um ponto x indicando que o custo ótimo é $-\infty$.

Neste caso, temos uma matriz base B, uma variável não-básica x_j com custo reduzido negativo e a j-ésima coluna $B^{-1}A_j$ do tableau não tem nenhum elemento positivo.

Considere a j-ésima direção básica d, que é o vetor que satisfaz $d_B = -B^{-1}A_j$, $d_j = 1$ e $d_i = 0$ para todo índice não-básico i, $i \neq j$.

Critério de ilimitação no Método Simplex

Note que o vetor d satisfaz $Ad = 0$ e $d \geq 0$ e, portanto, pertence ao cone recessional.

Ele também é uma direção de decréscimo do custo, já que o custo reduzido $\bar{c}_j$ é negativo.

Das restrições que definem o cone recessional, a j-ésima direção básica d satisfaz $n-1$ restrições linearmente independentes por igualdade, que são as m restrições $Ad = 0$ e as $n-m-1$ restrições $d_i = 0$.

Portanto, d é um raio extremo.