Lema de Farkas e desigualdades lineares

Marina Andretta

ICMC-USP

30 de outubro de 2016

Baseado no livro Introduction to Linear Optimization, de D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis.

Lema de Farkas

Suponha que desejamos determinar se um determinado sistema linear de inequações é inviável.

Vamos ver agora, usando teoria de dualidade, que a inviabilidade de um sistema linear de inequações é equivalente à viabilidade de um outro sistema linear de inequações relacionado.

Este último sistema pode ser interpretado como um certificado de inviabilidade do primeiro sistema.

Lema de Farkas

Considere um conjunto de restrições na forma padrão $Ax = b$ e $x \geq 0$. Suponha que existe um vetor p tal que $p^T A \geq 0^T$ e $p^T b < 0$.

Então, para todo $x \geq 0$, temos que $p^T Ax \geq 0^T$ e, como $p^T b < 0$, temos $p^T Ax \neq p^T b$.

Assim, concluímos que $Ax \neq b$ para todo $x \geq 0$.

Isso mostra que, se conseguimos encontrar um vetor p que satisfaz $p^T A \geq 0^T$ e $p^T b < 0$, as restrições no formato padrão não podem ter uma solução viável.

Lema de Farkas

Teorema 1 (Lema de Farkas). *Sejam A uma matriz de dimensão $m \times n$ e $b \in \boldsymbol{R}^m$. Então vale exatamente uma das alternativas a seguir:*

(a) *Existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$.*

(b) *Existe algum vetor p tal que $p^T A \geq 0^T$ e $p^T b < 0$.*

Prova do Teorema 1

Prova: Primeiramente, vamos mostrar que (a) $\Rightarrow$ negação de (b), ou seja, se existe um $x \geq 0$ tal que $Ax = b$ então não existe um vetor p tal que $p^T A \geq 0^T$ e $p^T b < 0$.

Se existe um $x \geq 0$ que satisfaz $Ax = b$ e existe um p que satisfaz $p^T A \geq 0^T$, temos que $p^T b = p^T Ax \geq 0$. Ou seja, tal p não satisfaz $p^T b < 0$.

Prova do Teorema 1

Agora vamos mostrar que a negação de (a) $\Rightarrow$ (b), ou seja, se não existe um vetor $x \geq 0$ tal que $Ax = b$ então existe algum p tal que $p^T A \geq 0^T$ e $p^T b < 0$.

Suponha que não exista um vetor $x \geq 0$ que satisfaça $Ax = b$. Considere o par de problemas

$$\begin{array}{ll|ll} \text{maximizar} & 0^T x & \text{minimizar} & p^T b \\ \text{sujeita a} & Ax = b, & \text{sujeita a} & p^T A \geq 0^T. \\ & x \geq 0, & & \end{array}$$

Note que o problema da esquerda é o dual do problema da direita.

Prova do Teorema 1

Como o problema da esquerda é inviável, temos que o problema da direita ou é ilimitado (ou seja, o custo ótimo é $-\infty$) ou é inviável.

Como $p = 0$ é uma solução viável para este problema, temos que ele é ilimitado.

Portanto, existe um p que é viável, ou seja, $p^T A \geq 0^T$, que tem custo negativo, ou seja, $p^T b < 0$. $\square$

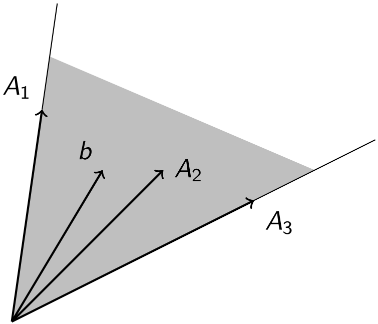
Lema de Farkas

Vejamos uma interpretação geométrica para o Lema de Farkas.

Sejam $A_1, ..., A_n$ as colunas da matriz A. Note que $Ax = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i$.

Assim, a existência de um vetor $x \geq 0$ que satisfaz $Ax = b$ é o mesmo que dizer que b deve pertencer ao conjunto C de todas as combinações lineares não-negativas dos vetores $A_1, ..., A_n$.

Lema de Farkas

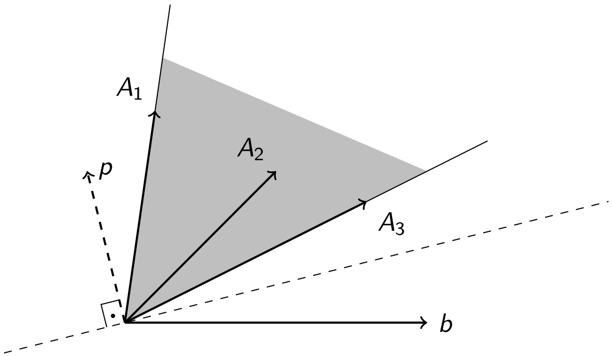


Lema de Farkas

Se b não pertence a este conjunto C (ou seja, quando a alternativa (a) do Lema de Farkas não vale), esperamos, intuitivamente, ser capazes de encontrar um vetor p e um hiperplano associado $\{z \mid p^T z = 0\}$ tal que b fique de um lado deste hiperplano e C fique do outro lado.

Neste caso, temos $p^T b < 0$ e $p^T A_i \geq 0$ para todo i. Ou, equivalentemente, $p^T A \geq 0^T$. Ou seja, a alternativa (b) do Lema de Farkas vale.

Lema de Farkas



Lema de Farkas

O Lema de Farkas é mais antigo do que o desenvolvimento da programação linear, mas a teoria de dualidade faz com que sua prova seja mais simples.

É possível fazer uma demonstração alternativa, baseada nos argumentos geométricos que acabamos de ver.

O corolário a seguir apresenta uma afirmação equivalente ao Lema de Farkas que às vezes é mais conveniente.

Lema de Farkas

Corolário 1. *Sejam* $A_1, ..., A_n$ *e* b *vetores dados e suponha que todo vetor* p *que satisfaz* $p^T A_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$, *satisfaça também* $p^T b \geq 0$.

Então b *pode ser expresso como uma combinação linear não-negativa dos vetores* $A_1, ..., A_n$.

Lema de Farkas

Teorema 2. *Suponha que o sistema de desigualdades lineares $Ax \leq b$ tenha pelo menos uma solução e seja d um escalar.*

Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) *Toda solução viável do sistema $Ax \leq b$ satisfaz $c^T x \leq d$.*

(b) *Existe algum $p \geq 0$ tal que $p^T A = c^T$ e $p^T b \leq d$.*

Prova do Teorema 2

Prova: Considere o par de problemas

$$\begin{array}{ll|ll} \text{maximizar} & c^T x & \text{minimizar} & p^T b \\ \text{sujeita a} & Ax \leq b, & \text{sujeita a} & p^T A = c^T, \\ & & & p \geq 0. \end{array}$$

Note que o problema da esquerda é o dual do problema da direita.

Vamos mostrar primeiro que (a) $\Rightarrow$ (b), ou seja, se toda solução viável do sistema $Ax \leq b$ satisfaz $c^T x \leq d$ então existe algum $p \geq 0$ tal que $p^T A = c^T$ e $p^T b \leq d$.

Prova do Teorema 2

Se o sistema $Ax \leq b$ tem solução viável e se toda solução viável satisfaz $c^T x \leq d$, então o problema da esquerda tem solução ótima e o custo ótimo é limitado superiormente por d.

Pelo Teorema forte de dualidade (Teorema 2 da aula sobre "Teoremas de dualidade"), o problema da direita também tem solução ótima p, cujo custo é limitado superiormente por d. Esta solução ótima satisfaz $p^T A = c^T$, $p \geq 0$ e $p^T b \leq d$.

Prova do Teorema 2

Agora vamos mostrar que (b) $\Rightarrow$ (a), ou seja, se existe algum $p \geq 0$ tal que $p^T A = c^T$ e $p^T b \leq d$ então toda solução viável do sistema $Ax \leq b$ satisfaz $c^T x \leq d$.

Se algum p satisfaz $p^T A = c^T$, $p \geq 0$ e $p^T b \leq d$, então o problema da direita tem solução viável. Então, pelo Teorema fraco de dualidade (Teorema 1 da aula sobre "Teoremas de dualidade"), toda solução viável do problema da esquerda (ou seja, todo ponto x tal que $Ax \leq b$) deve satisfazer $c^T x \leq p^T b \leq d$. $\square$

Aplicação: precificação de ativos

Considere um mercado que opera em um único período e no qual n ativos são negociados.

Dependendo dos eventos que acontecem neste único período, existem m possíveis estados da natureza no fim do período.

Se investimos \$1 em um ativo i e o estado da natureza é s, recebemos um retorno de r_{si}.

Então, cada ativo i é descrito por um vetor de taxas de retorno $(r_{1i}, \ldots, r_{mi})$.

Aplicação: precificação de ativos

A matriz de taxas de retorno $R \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}$$

dá as taxas de retorno de cada um dos n ativos para cada um dos m estados da natureza.

Seja x_i a quantidade que temos do ativo i. Um portfólio de ativos é, então, um vetor $x = (x_1, ..., x_n)$.

As componentes de um portfólio x pode ser positivas ou negativas.

Um valor positivo de x_i indica que x_i unidades do ativo i foram compradas e, então, podemos receber $r_{si}x_i$ se o estado s acontece.

Um valor negativo de x_i indica que $|x_i|$ unidades do ativo i foram vendidas no início do período, com a promessa de serem compradas de volta no final do período. Aqui, devemos pagar $r_{si}|x_i|$ se o estado s acontece, que é o mesmo que ter retorno de $r_{si}x_i$.

Aplicação: precificação de ativos

A riqueza em um estado s que resulta de um portfólio x é dada por

$$w_s = \sum_{i=1}^{n} r_{si} x_i.$$

Introduzimos o vetor $w = (w_1, ..., w_m)$ e temos

$$w = Rx.$$

Seja p_i o preço do ativo i no início do período e seja $p = (p_1, ..., p_n)$ o vetor de preço dos ativos.

Então, o custo de adquirir um portfólio x é dado por $p^T x$.

O problema central na precificação de ativos é determinar quais devem ser os preços p_i.

Para tratar deste problema, introduzimos a condição de ausência de arbitragem, que está por trás de muito da teoria de finanças: preços de ativos devem ser sempre tais que nenhum investidor possa garantidamente obter um retorno não-negativo de um investimento negativo.

Em outras palavras, qualquer portfólio que dê uma quantia não-negativa de retorno em todo estado da natureza deve ser valioso para investidores, então ele deve ter custo não-negativo.

Aplicação: precificação de ativos

Matematicamente, a condição de ausência de arbitragem pode ser expressa como

$$\text{se } Rx \geq 0, \text{ então devemos ter } p^T x \geq 0.$$

Dado um conjunto de ativos, descritos pela matriz de taxas de retorno R, apenas alguns preços p são consistentes com a condição de ausência de arbitragem.

Para saber o que caracteriza tais preços e que restrições a suposição de ausência de arbitragem impõe nos preços dos ativos, usamos o Lema de Farkas.

Aplicação: precificação de ativos

Teorema 3. *A condição de ausência de arbitragem é satisfeita se, e somente se, existe um vetor não-negativo* $q = (q_1, ..., q_m)$ *tal que o preço de cada ativo é dado por*

$$p_i = \sum_{s=1}^{m} q_s r_{si}.$$

Prova do Teorema 3

Prova: A condição de ausência de arbitragem diz que não existe um vetor x tal que $x^T R^T \geq 0^T$ e $x^T p < 0$. Note que isto é o mesmo que diz a condição (b) do Lema de Farkas (Teorema 1), trocando b por p e A por R^T.

Portanto, pelo Lema de Farkas (Teorema 1) a condição de ausência de arbitragem vale se, e somente se, existe um vetor não-negativo q tal que $R^T q = p$, que é a hipótese do nosso teorema. $\square$

Aplicação: precificação de ativos

O Teorema 3 diz que sempre que o mercado funciona de modo eficiente o suficiente para eliminar a possibilidade de arbitragem, devem existir "preços de estados" q_s que podem ser usados para dar valor aos ativos existentes.

Intuitivamente, estabelece-se um preço q_s não-negativo para um ativo elementar que paga \$1 se o estado da natureza é s. E nada, caso contrário.

Isso requer que todo ativo seja precificado de maneira adequada, com seu valor total sendo a soma dos ativos elementares dos quais ele é composto.

Aplicação: precificação de ativos

Em geral, o vetor de preços de estados q não é único, a menos que o número de ativos seja igual ou maior que o número de estados.

A condição de ausência de arbitragem é muito simples, mas muito poderosa. Ela é o elemento principal por trás de muitos resultados importantes em economia.