SME0211 - Otimização Linear
Segundo semestre de 2016

Professora: Marina Andretta (andretta@icmc.usp.br)
Estagiário PAE: Valdemar Abrão Pedro Anastácio Devesse (valdemar.abrao@usp.br)

Lista de exercícios 1 - gabarito

1. Seja x_i a variável que representa a quantidade de ingrediente para composição da liga metálica e seja $i = 1, 2, 3$ o índice correspondente a lingotes de ferro, grafite e sucata, respectivamente.

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & 90x_1 + 180x_2 + 25x_3 && (1)\\
\text{sujeita a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 10, && (2)\\
& 0 \leq 0.005x_1 + 0.90x_2 + 0.09x_3 \leq 0.095, && (3)\\
& 1.9 \leq 0.14x_1 + 0.27x_3 \leq 2.0, && (4)\\
& 0 \leq x_1 \leq 5, && (5)\\
& 0 \leq x_2 \leq 5, && (6)\\
& 0 \leq x_3 \leq 5. && (7)
\end{aligned}
$$

A expressão em (1) corresponde à função objetivo. A equação em (2) corresponde à restrição de demanda e as inequações (3)-(4) correspondem às restrições de capacidade. O domínio das variáveis é apresentado nas restrições (5)-(7).

2. Suponhamos agora x_{ij} é a variável que representa a quantidade de ingrediente i na liga metálica j. Consideremos o índice $i = 1, 2, 3$ para lingotes de ferro, grafite e sucata e $j = 1, 2$ para liga 1 e liga 2, respectivamente.

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & 90(x_{11} + x_{12}) + 180(x_{21} + x_{22}) + 25(x_{31} + x_{32}) && (8)\\
\text{sujeita a} \quad & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10, && (9)\\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6, && (10)\\
& 0 \leq 0.005x_{11} + 0.90x_{21} + 0.090x_{31} \leq 0.095, && (11)\\
& 1.9 \leq 0.14x_{11} + 0.27x_{31} \leq 2.0, && (12)\\
& 0 \leq 0.005x_{12} + 0.90x_{22} + 0.090x_{32} \leq 0.06, && (13)\\
& 0.72 \leq 0.14x_{12} + 0.27x_{32} \leq 0.84, && (14)\\
& 0 \leq x_{11} + x_{12} \leq 5, && (15)\\
& 0 \leq x_{21} + x_{22} \leq 5, && (16)\\
& 0 \leq x_{31} + x_{32} \leq 12. && (17)
\end{aligned}
$$

A expressão em (8) corresponde à função objetivo. As equações (9) e (10) correspondem à restrição de demanda para produção das liga 1 e 2, respectivamente. As inequações (11)-(12) correspondem às restrições de capacidade para a liga 1 e as inequações (13)-(14) correspondem às restrições de capacidade para a liga 2. A disponibilidade de cada um dos ingredientes é limitada pelos valores apresentados nas restrições (15)-(17).

3. Seja x_{jt} a variável que representa a quantidade do investimento j no período t. r_j representa a taxa de juros do investimento j e D_j a duração do investimento j.

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & \sum_{j=1}^{3}\sum_{t=1}^{5} r_j x_{jt} && (18)\\
\text{sujeita a} \quad & x_{jt} \leq 5000 - \sum_{\alpha=\max\{1,t-D_j+1\}}^{t-1} x_{j\alpha}, \quad \forall j,t, && (19)\\
& x_{31} = 0, && (20)\\
& x_{jt} = 0, \quad \forall j,t,t+D_j > 5, && (21)\\
& x_{jt} \geq 0, \quad \forall j,t. && (22)
\end{aligned}
$$

A função objetivo, na expressão (18), corresponde à maximização de três investimentos no horizonte de 5 anos. A equação em (19) corresponde à restrição de disponibilidade do valor a investir num determinado período. Essa quantidade é limitada pelo valor inicial, 5000, subtraído pelo que já foi investido até ao período anterior. Mas, para saber o que foi investido até período anterior, é preciso saber a duração de cada investimento e, por isso, incluiu-se a variável D_j. Assim, para controlar o caso da duração maior que o ano de investimento, verificamos o máximo entre 1 e a diferença entre o período em que se investe e a duração, acrescentando 1, que representaria o primeiro ano. A restrição (20) é dada na formulação, o investimento 1 só pode ser feito no segundo ano. A restrição (21) controla o não investimento em períodos maiores que os da duração total de investimento.

O domínio da variável x_{jt} é expresso na restrição (22).