Problemas de programação linear

Marina Andretta

ICMC-USP

3 de agosto de 2016

Baseado no livro Introduction to Linear Optimization, de D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis.

Definição de problema de programação linear

Em um problema de programação linear geral, é dado um vetor de custos $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ e desejamos minimizar a função linear de custo $c^T x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ sobre todos os vetores $x \in \boldsymbol{R}^n$ que satisfaçam um conjunto de restrições lineares de igualdade e desigualdade.

Sejam M_1, M_2 e M_3 conjuntos finitos de índices e, para cada i em algum destes conjuntos, são dados um vetor n-dimensional a_i e um escalar b_i que será usado para definir a restrição i.

Sejam N_1 e N_2 subconjuntos de $\{1, 2, ..., n\}$ que indicam quais variáveis x_j são restritas a ser não-negativas ou não-positivas, respectivamente.

Definição de problema de programação linear

Temos, então, o seguinte problema na forma geral:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & c^T x & \\ \text{sujeita a} & a_i^T x \geq b_i, & i \in M_1, \\ & a_i^T x \leq b_i, & i \in M_2, \\ & a_i^T x = b_i, & i \in M_3, \\ & x_j \geq 0, & j \in N_1, \\ & x_j \leq 0, & j \in N_2. \end{array}} \qquad (1)$$

Definição de problema de programação linear

As variáveis $x_1, ..., x_n$ são chamadas de variáveis de decisão.

Um vetor x que satisfaz todas as restrições é chamado de solução viável ou vetor viável. O termo viável pode ser substituído por factível.

O conjunto de todas as soluções viáveis é chamado de conjunto viável ou região viável.

Se um índice j não pertence nem a N_1, nem a N_2, não há restrições ao sinal de x_j. Neste caso, dizemos que a variável x_j é livre ou irrestrita.

Definição de problema de programação linear

A função $c^T x$ é chamada de função objetivo ou de função de custo.

Uma solução viável x^* que minimiza a função objetivo (ou seja, $c^T x^* \leq c^T x$ para toda solução viável x) é chamada de solução viável ótima ou, simplesmente, solução ótima.

O valor de $c^T x^*$ é chamado de custo ótimo.

Se, para todo número real K, existe uma solução viável com custo menor do que K, dizemos que o custo ótimo é $-\infty$ e que a função objetivo é ilimitada por baixo. Em alguns casos, abusando desta definição, podemos dizer que o problema é ilimitado por baixo.

Definição de problema de programação linear

Note que não é necessário estudar problemas de maximização separadamente, já que maximizar uma função $c^T x$ é equivalente a minimizar $-c^T x$.

Uma restrição $a_i^T x = b_i$ pode ser substituída por duas restrições $a_i^T x \leq b_i$ e $a_i^T x \geq b_i$.

Uma restrição $a_i^T x \leq b_i$ pode ser substituída pela restrição $(-a_i)^T x \geq -b_i$.

Uma restrição do tipo $x_j \leq 0$ ou $x_j \geq 0$ é um caso particular de uma restrição do tipo $a_i^T x \geq b_i$.

Definição de problema de programação linear

Portanto, todo conjunto viável em um problema de programação linear geral pode ser escrito usando somente desigualdades do tipo $a_i^T x \geq b_i$.

Suponha que há um total de dessas m restrições de desigualdade, indexadas de 1 a m. Sejam $b = (b_1, ..., b_m)$ e a matriz $A \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$, cuja i-ésima linha é dada por a_i^T.

Então, as restrições $a_i^T x \geq b_i$ podem ser escritas como $Ax \geq b$, com $\geq$ aplicado a cada componente.

Então, o problema (1) pode ser escrito como

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{sujeita a} & Ax \geq b. \end{array}} \tag{2}$$

Problema de programação linear na forma padrão

Dizemos que um problema de programação linear da forma

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{sujeita a} & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}} \tag{3}$$

está na forma padrão.

Problema de programação linear na forma padrão

Todo problema de programação linear pode ser escrito como um problema na forma padrão equivalente.

Quando dizemos que dois problemas são equivalentes, queremos dizer que dada uma solução viável de um problema, conseguimos construir uma solução viável do outro, com mesmo custo.

Em particular, ambos os problemas têm o mesmo custo ótimo e, dada uma solução ótima de um problema, podemos construir uma solução ótima do outro.

Problema de programação linear na forma padrão

Para transformar um problema geral em um problema na forma padrão, podemos seguir dois passos:

1. eliminar as variáveis livres;
2. eliminar restrições de desigualdade.

Problema de programação linear na forma padrão

Para eliminar uma variável livre x_j, podemos trocá-la por $x_j^+ - x_j^-$, com x_j^+ e x_j^- novas variáveis.

Para estas novas variáveis, impomos que $x_j^+ \geq 0$ e $x_j^- \geq 0$.

Problema de programação linear na forma padrão

Para eliminar uma restrição de desigualdade do tipo

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,$$

introduzimos uma nova variável s_i e trocamos a restrição original por

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i, \quad s_i \geq 0.$$

Problema de programação linear na forma padrão

Analogamente, para eliminar uma restrição de desigualdade do tipo

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i,$$

introduzimos uma nova variável s_i e trocamos a restrição original por

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i, \quad s_i \geq 0.$$

A nova variável s_i é chamada de variável de folga.

Exemplo

Considere o seguinte problema na forma geral:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & 2x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeita a} & x_1 + x_2 \geq 3, \\ & 3x_1 + 2x_2 = 14, \\ & x_1 \geq 0. \end{array}}$$

Para escrevê-lo na forma padrão, precisamos eliminar a variável livre x_2 e a restrição de desigualdade.

Exemplo

Para eliminar a variável livre x_2, podemos trocá-la por $x_2^+ - x_2^-$ e acrescentar as restrições $x_2^+ \geq 0$ e $x_2^- \geq 0$.

O problema fica então

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & 2x_1 + 4(x_2^+ - x_2^-) \\ \text{sujeita a} & x_1 + (x_2^+ - x_2^-) \geq 3, \\ & 3x_1 + 2(x_2^+ - x_2^-) = 14, \\ & x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0. \end{array}}$$

Exemplo

Para eliminar a restrição de desigualdade $x_1 + x_2^+ - x_2^- \geq 3$, acrescentamos a variável x_3 e trocamos a restrição por

$$x_1 + x_2^+ - x_2^- - x_3 = 3, \quad x_3 \geq 0.$$

Por fim, o problema fica na forma padrão

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & 2x_1 + 4x_2^+ - 4x_2^- \\ \text{sujeita a} & x_1 + x_2^+ - x_2^- - x_3 = 3, \\ & 3x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- = 14, \\ & x_1, x_2^+, x_2^-, x_3 \geq 0. \end{array}}$$

Exemplo

Para este exemplo, dada a solução viável $(x_1, x_2) = (6, -2)$ para o problema original, obtemos a solução viável $(x_1, x_2^+, x_2^-, x_3) = (6, 0, 2, 1)$ para o problema na forma padrão, com o mesmo custo (4).

Por outro lado, dada a solução viável $(x_1, x_2^+, x_2^-, x_3) = (8, 1, 6, 0)$ para o problema na forma padrão, obtemos a solução viável $(x_1, x_2) = (8, -5)$ para o problema original, com o mesmo custo (-4).

Problema de programação linear na forma padrão

A partir de agora, geralmente usaremos a forma geral $Ax \geq b$ para desenvolver a teoria de programação linear.

No entanto, quando tratarmos de algoritmos, usaremos a forma padrão $Ax = b, x \geq 0$, que é mais conveniente computacionalmente.