Teoria de dualidade

Marina Andretta

ICMC-USP

19 de outubro de 2016

Baseado no livro Introduction to Linear Optimization, de D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis.

Teoria de dualidade

A teoria de dualidade pode ser motivada usando o método de multiplicadores de Lagrange, geralmente usado para minimizar uma função sujeita a restrições de igualdade.

Por exemplo, para resolver o problema

$$\begin{array}{lcccl} \text{minimizar} & x^2 & + & y^2 & \\ \text{sujeita a} & x & + & y & = 1, \end{array}$$

introduzimos o multiplicador de Lagrange p (ou preço) e definimos a função lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, p) = x^2 + y^2 + p(1 - x - y).$$

Fixando p, minimizamos $\mathcal{L}$ nas variáveis x e y, sem nenhuma restrição.

Isso pode ser feito definindo as derivadas parciais $\partial\mathcal{L}/\partial x$ e $\partial\mathcal{L}/\partial y$ como nulas.

A solução ótima para o problema sem restrições é

$$x = y = \frac{p}{2},$$

que depende de p.

A restrição $x + y = 1$ nos dá que $p = 1$. Portanto, a solução do problema original é $x = y = 1/2$.

Teoria de dualidade

A ideia do exemplo é a seguinte: em vez de impor a restrição $x + y = 1$, permitimos que ela seja violada e associamos um multiplicador de Lagrange p à quantidade $1 - x - y$ desta violação.

Isso leva ao problema de minimização de $x^2 + y^2 + p(1 - x - y)$.

Quando o multiplicador é escolhido de maneira adequada (no exemplo, $p = 1$), a solução ótima para o problema restrito também é solução ótima do problema irrestrito.

Em particular, usando este valor específico de p, a presença ou ausência da restrição não afeta o custo ótimo.

Teoria de dualidade

O mesmo pode ser feito com problemas de programação linear: associamos uma variável de preço a cada restrição e procuramos por preços com os quais a presença ou ausência das restrições não afeta o custo ótimo.

Para o caso de programação linear, estes preços podem ser calculados resolvendo um novo problema de programação linear, chamado de problema dual do original.

Teoria de dualidade

Considere o problema na forma padrão

$$\begin{array}{lrcl} \text{minimizar} & c^T x & & \\ \text{sujeita a} & Ax & = & b, \\ & x & \geq & 0, \end{array}$$

que chamamos de problema primal, e seja x^* uma solução ótima, que supomos existir.

Vamos definir um problema relaxado no qual as restrições $Ax = b$ são substituídas pela penalidade $p^T(b - Ax)$, com p o vetor de preço com a mesma dimensão de b.

Teoria de dualidade

Temos então o problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x + p^T(b - Ax) \\ \text{sujeita a} & x \geq 0. \end{array}$$

Seja $g(p)$ o custo ótimo do problema relaxado, que depende de p.

O problema relaxado tem mais pontos viáveis do que o problema primal, então $g(p)$ não deve ser maior do que o custo ótimo $c^T x^*$.

De fato,

$$g(p) = \min_{x \geq 0} \left(c^T x + p^T(b - Ax) \right) \leq c^T x^* + p^T(b - Ax^*) = c^T x^*,$$

já que x^* é viável no problema primal (ou seja, $Ax^* = b$).

Portanto, cada valor de p fornece um limitante inferior para o custo ótimo $c^T x^*$

Teoria de dualidade

O problema

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & g(p) \\ \text{sujeita a} & \text{nenhuma restrição} \end{array}$$

pode ser interpretado como uma busca por este limitante inferior mais apertado possível.

Este problema é conhecido como problema dual.

Teoria de dualidade

O principal resultado da teoria de dualidade é que o custo ótimo do problema dual é igual ao custo ótimo do problema primal $c^T x^*$.

Em outras palavras, quando os preços p são escolhidos de acordo com a solução ótima do problema dual, a opção de violar as restrições $Ax = b$ não tem efeito.

Teoria de dualidade

Usando a definição de $g(p)$, temos

$$g(p) = \min_{x \geq 0} \left(c^T x + p^T (b - Ax) \right) = p^T b + \min_{x \geq 0} (c^T - p^T A)x.$$

Note que

$$\min_{x \geq 0} (c^T - p^T A)x = \begin{cases} 0, & \text{se } c^T - p^T A \geq 0^T, \\ -\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ao maximizar $g(p)$, precisamos considerar apenas valores de p para os quais $g(p)$ não é $-\infty$.

Portanto, o problema dual é o mesmo que o problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & p^T b \\ \text{sujeita a} & p^T A \leq c^T. \end{array}$$

No exemplo anterior, começamos com restrições de igualdade $Ax = b$ e chegamos a um problema sem restrições ao sinal do vetor de preço p.

Se o problema primal tivesse restrições de desigualdade da forma $Ax \geq b$, elas poderiam ser substituídas por $Ax - s = b$ e $s \geq 0$.

A restrição de igualdade pode ser escrita na forma

$$(A \mid -I) \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = 0,$$

o que leva às restrições duais

$$p^T (A \mid -I) \leq \left(c^T \mid 0^T\right).$$

Ou, equivalentemente,

$$p^T A \leq c^T, \;\; p \geq 0.$$

Além disso, se o vetor de variáveis x não tem restrições de sinal, podemos usar o fato que

$$\min_{x}(c^T - p^T A)x = \begin{cases} 0, & \text{se } c^T - p^T A = 0^T, \\ -\infty, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para chegar à restrição $p^T A = c^T$ no problema dual.

Em suma, a construção do dual de um problema primal de minimização pode ser visto da seguinte maneira.

- Temos um vetor p de parâmetros (variáveis duais) e, para cada p, temos um método para obter um limitante inferior para o custo ótimo do problema primal.
- O problema dual é um problema de maximização que busca um limitante inferior o mais apertado possível.
- Para alguns vetores p, o limitante inferior correspondente é $-\infty$, que não fornece nenhuma informação útil.
- Portanto, precisamos apenas maximizar considerando valores de p que levam a limitantes inferiores não-triviais, que é o que leva às restrições duais.

Problema dual

Seja A uma matriz com linhas a_i^T e colunas A_j.

Dado um problema primal com estrutura como mostrado à esquerda, seu dual é definido como um problema com a estrutura mostrada à direita:

$$\begin{array}{llcll|llcll}
\text{minimizar} & c^T x & & & & \text{maximizar} & p^T b & & & \\
\text{sujeita a} & a_i^T x & \geq & b_i, & i \in M_1, & \text{sujeita a} & p_i & \geq & 0, & i \in M_1, \\
 & a_i^T x & \leq & b_i, & i \in M_2, & & p_i & \leq & 0, & i \in M_2, \\
 & a_i^T x & = & b_i, & i \in M_3, & & p_i & \text{livre}, & & i \in M_3, \\
 & x_j & \geq & 0, & j \in N_1, & & p^T A_j & \leq & c_j, & j \in N_1, \\
 & x_j & \leq & 0, & j \in N_2, & & p^T A_j & \geq & c_j, & j \in N_2, \\
 & x_j & \text{livre}, & & j \in N_3, & & p^T A_j & = & c_j & j \in N_3.
\end{array}$$

Problema dual

Note que, para cada restrição do problema primal (com exceção das restrições de sinal), introduzimos uma variável ao problema dual.

E, para cada variável do primal, introduzimos uma restrição ao problema dual.

Dependendo se a restrição do problema primal é de igualdade ou de desigualdade, a variável dual correspondente é livre ou com restrição de sinal, respectivamente.

Além disso, dependendo se a variável no problema primal é livre ou tem restrição de sinal, temos uma restrição de igualdade ou de desigualdade, respectivamente, no problema dual.

Problema dual

Na tabela a seguir temos um resumo destas relações entre os problemas primal e dual.

primal	minimizar	maximizar	**dual**
restrições	$\geq b_i$	≥ 0	variáveis
	$\leq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	livre	
variáveis	≥ 0	$\leq c_j$	restrições
	≤ 0	$\geq c_j$	
	livre	$= c_j$	

Problema dual

Se partimos de um problema de maximização, podemos convertê-lo em um problema equivalente de minimização e então montar seu dual de acordo com as regras descritas anteriormente.

No entanto, para evitar confusões, vamos supor que o problema primal sempre é de minimização e seu dual é de maximização.

Além disso, vamos nos referir à função objetivo do problema dual como um custo que deve ser maximizado.

Problema dual

Um problema e seu dual podem ser definidos de maneira mais compacta, em notação matricial, se uma forma particular é usada para o primal.

Temos, por exemplo, os seguintes pares de problemas primais e duais:

$$\begin{array}{ll|ll} \text{minimizar} & c^T x & \text{maximizar} & p^T b \\ \text{sujeita a} & Ax = b, & \text{sujeita a} & p^T A \leq c^T, \\ & x \geq 0, & & \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ll|ll} \text{minimizar} & c^T x & \text{maximizar} & p^T b \\ \text{sujeita a} & Ax \geq b, & \text{sujeita a} & p^T A = c^T, \\ & & & p \geq 0. \end{array}$$

Exemplo 1

Considere o problema primal

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{minimizar} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{sujeita a} & -x_1 & + & 3x_2 & & & = & 5, \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 6, \\
 & & & & & x_3 & \leq & 4, \\
 & & & & & x_1 & \geq & 0, \\
 & & & & & x_2 & \leq & 0, \\
 & & & & & x_3 & \text{livre.} &
\end{array}
$$

Exemplo 1

Seu dual é dado por

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{maximizar} & 5p_1 & + & 6p_2 & + & 4p_3 & & \\
\text{sujeita a} & & & & & p_1 & \text{livre}, & \\
 & & & & & p_2 & \geq & 0, \\
 & & & & & p_3 & \leq & 0, \\
 & -p_1 & + & 2p_2 & & & \leq & 1, \\
 & 3p_1 & - & p_2 & & & \geq & 2, \\
 & & & 3p_2 & + & p_3 & = & 3.
\end{array}
$$

Exemplo 1

Transformando o problema dual em um problema equivalente de minimização e multiplicando as 3 últimas restrições por -1, temos

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{minimizar} & -5p_1 & - & 6p_2 & - & 4p_3 & & \\
\text{sujeita a} & & & & & p_1 & \text{livre,} & \\
 & & & & & p_2 & \geq & 0, \\
 & & & & & p_3 & \leq & 0, \\
 & p_1 & - & 2p_2 & & & \geq & -1, \\
 & -3p_1 & + & p_2 & & & \leq & -2, \\
 & & & -3p_2 & - & p_3 & = & -3.
\end{array}
$$

Exemplo 1

Calculando o dual do problema dual, temos

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{maximizar} & -x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & & \\
\text{sujeita a} & x_1 & - & 3x_2 & & & = & -5, \\
 & -2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & \leq & -6, \\
 & & & & & -x_3 & \geq & -4, \\
 & & & & & x_1 & \geq & 0, \\
 & & & & & x_2 & \leq & 0, \\
 & & & & & x_3 & \text{livre.} &
\end{array}
$$

Note que este problema é equivalente ao problema original.

Teorema 1. *Se transformamos o problema dual em um problema equivalente de minimização e então calculamos seu dual, obtemos um problema equivalente ao problema original.*

Prova: Exercício. Para fazer esta demonstração, basta seguir passos como os feitos no Exemplo 1, trocando os números específicos por expressões genéricas.

Exemplo 2

Vamos ver que problemas primais equivalentes geram problemas duais também equivalentes.

Considere o problema primal à esquerda e seu dual, à direita:

$$
\begin{array}{lrcl|lrcl}
\text{minimizar} & c^T x & & & \text{maximizar} & p^T b & & \\
\text{sujeita a} & Ax & \geq & b, & \text{sujeita a} & p & \geq & 0, \\
 & x & \text{livre}, & & & p^T A & = & c^T.
\end{array}
$$

Exemplo 2

Transformamos o problema primal introduzindo variáveis de folga e, então, calculamos seu dual:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{minimizar} & c^T x + 0^T s & & \\
\text{sujeita a} & Ax - s & = & b, \\
 & x & & \text{livre}, \\
 & s & \geq & 0,
\end{array}
\quad\Bigg|\quad
\begin{array}{lrcl}
\text{maximizar} & p^T b & & \\
\text{sujeita a} & p & & \text{livre}, \\
 & p^T A & = & c^T, \\
 & -p & \leq & 0.
\end{array}
$$

Exemplo 2

Alternativamente, se tomamos o problema primal original e subtituímos x por variáveis com restrições de sinal, temos o seguinte par primal-dual:

$\begin{array}{lrcl} \text{minimizar} & c^T x^+ - c^T x^- & & \\ \text{sujeita a} & Ax^+ - Ax^- & \geq & b, \\ & x^+ & \geq & 0, \\ & x^- & \geq & 0, \end{array}$	$\begin{array}{lrcl} \text{maximizar} & p^T b & & \\ \text{sujeita a} & p & \geq & 0, \\ & p^T A & \leq & c^T, \\ & -p^T A & \leq & -c^T. \end{array}$

Exemplo 3

Vamos ver agora o efeito de eliminar restrições de igualdade redundantes em problemas na forma padrão.

Considere um problema viável na forma padrão (à esquerda) e seu dual (à direita):

$$
\begin{array}{llcl|ll}
\text{minimizar} & c^T x & & & \text{maximizar} & p^T b \\
\text{sujeita a} & Ax & = & b, & \text{sujeita a} & p^T A \leq c^T. \\
 & x & \geq & 0, & &
\end{array}
$$

Exemplo 3

Sejam $a_1^T, ..., a_m^T$ as linhas de A e suponha que $a_m = \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i a_i$ para escalares $\gamma_1, ..., \gamma_{m-1}$.

Note que a última restrição de igualdade é redundante e pode ser eliminada.

Considere uma solução viável arbitrária x. Temos que

$$b_m = a_m^T x = \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i a_i^T x = \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i b_i. \quad (1)$$

Exemplo 3

Note que as restrições duais são da forma $\sum_{i=1}^{m} p_i a_i^T \leq c^T$ e podem ser reescritas como

$$\sum_{i=1}^{m-1} (p_i + \gamma_i p_m) a_i^T \leq c^T.$$

Além disso, usando a equação (1), o custo dual $\sum_{i=1}^{m} p_i b_i$ é igual a

$$\sum_{i=1}^{m-1} (p_i + \gamma_i p_m) b_i.$$

Exemplo 3

Se definimos $q_i = p_i + \gamma_i p_m$, temos que o problema dual é equivalente a

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} q_i b_i \\ \text{sujeita a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} q_i a_i^T \leq c^T. \end{array}$$

Este é exatamente o mesmo problema dual que teríamos obtido se tivéssemos eliminado a última restrição de igualdade (redundante) do problema primal e depois calculado o problema dual.

Problema dual

Teorema 2. *Suponha que tenhamos transformado um problema de programação linear* Π_1 *em outro problema de programação linear* Π_2 *usando uma sequência de transformações dos seguintes tipos:*

(a) *Substituir uma variável livre pela diferença de duas variáveis não-negativas.*

(b) *Substituir uma restrição de desigualdade por uma restrição de igualdade que envolve variáveis de folga não-negativas.*

(c) *Se alguma linha da matriz* A *em um problema viável na forma padrão é linearmente dependente de outras linhas, eliminar a restrição de igualdade correspondente.*

Então, os problemas duais de Π_1 *e* Π_2 *são equivalentes, isto é, ou ambos são inviáveis ou ambos têm o mesmo custo ótimo.*

Prova: Exercício.