Regras para evitar ciclagem

Marina Andretta

ICMC-USP

19 de outubro de 2016

Baseado no livro Introduction to Linear Optimization, de D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis.

Regras para evitar ciclagem

Vamos agora apresentar duas regras para evitar ciclagem, que fazem com que o Método Simplex tenha garantia de término mesmo no caso de problemas não-degenerados.

Assim, como corolário, temos que se o custo ótimo é finito, existe uma base ótima, ou seja, uma base que satisfaz $B^{-1}b \geq 0$ e $\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0^T$.

Ordem lexicográfica

Vamos apresentar agora a regra lexicográfica de pivotamento, que foi criada ao analisar o comportamento do Método Simplex em um problema degenerado quando o vetor do lado direito b é perturbado.

Definição 1. *Um vetor* $u \in \boldsymbol{R}^n$ *é dito lexicograficamente maior (ou menor) do que outro vetor* $v \in \boldsymbol{R}^n$ *se* $u \neq v$ *e a primeira componente não-nula de* $u - v$ *é positiva (ou negativa, respectivamente). Simbolicamente, escrevemos*

$$u \overset{L}{>} v \quad ou \quad u \overset{L}{<} v.$$

Ordem lexicográfica

Por exemplo,

$$(0, 1, 2, 3) \overset{L}{>} (0, 1, 0, 3),$$

$$(1, 4, 9, 0) \overset{L}{<} (2, 9, 9, 4).$$

P1. Escolha uma coluna A_j arbitrária para entrar na base, desde que o custo reduzido $\bar{c}_j$ seja negativo.

Seja $u = B^{-1}A_j$ a j-ésima coluna do tableau.

P2. Para cada i tal que $u_i > 0$, divida a i-ésima linha do tableau (incluindo a entrada na coluna 0) por u_i e escolha a menor linha lexicograficamente.

Se a linha ℓ é uma linha lexicograficamente menor, então a ℓ-ésima variável básica $x_{B(\ell)}$ sai da base.

Exemplo

Considere o seguinte tableau (a linha 0 está omitida) e suponha que a coluna pivô seja a terceira ($j = 3$).

1	0	5	3	...
2	4	6	-1	...
3	0	7	9	...

Note que, para determinar a variável que sai da base, temos um empate, já que $x_{B(1)}/u_1 = 1/3$ e $x_{B(3)}/u_3 = 3/9 = 1/3$.

Exemplo

Dividimos, então, a primeira linha do tableau por $u_1 = 3$ e a terceira linha por $u_3 = 9$:

$$
\begin{array}{|c|cccc|}
\hline
1/3 & 0 & 5/3 & 1 & \ldots \\
* & * & * & * & \ldots \\
1/3 & 0 & 7/9 & 1 & \ldots \\
\hline
\end{array}
$$

O empate entre a primeira e a terceira linhas é desfeito fazendo uma comparação lexicográfica entre estas duas linhas.

Como $7/9 < 5/3$, a terceira linha é lexicograficamente menor e ela é escolhida como pivô. Ou seja, a variável $x_{B(3)}$ é escolhida para sair da base.

Regra lexicográfica de pivotamento

Note que a regra lexicográfica de pivotamento sempre leva a uma escolha única para a variável que vai sair da base.

Se esta escolha não fosse única, haveria duas linhas do tableau que são iguais, a menos da multiplicação por um escalar. Mas isso significaria que $B^{-1}A$ tem posto menor do que m e, portanto, A tem posto menor do que m. Isso contradiz a hipótese de que as linhas de A são linearmente independentes.

Regra lexicográfica de pivotamento

Teorema 1. *Suponha que o algoritmo Simplex começa com todas as linhas no tableau, com exceção da linha 0, lexicograficamente positivas. Suponha que a regra lexicográfica de pivotamento seja usada. Então:*

(a) *Toda linha do tableau simplex, com exceção da linha 0, permanece lexicograficamente positiva durante a execução do algoritmo.*

(b) *A linha 0 aumenta lexicograficamente estritamente a cada iteração.*

(c) *O Método Simplex termina depois de um número finito de iterações.*

Prova do Teorema 1

Prova: Primeiramente, vamos mostrar (a), ou seja, toda linha do tableau simplex, com exceção da linha 0, permanece lexicograficamente positiva durante a execução do algoritmo.

Suponha que todas as linhas do tableau, com exceção da linha 0, sejam lexicograficamente positivas no início de uma iteração do Simplex. Suponha que x_j entra na base e que a linha ℓ é a linha pivô.

De acordo com a regra lexicográfica de pivotamento, temos que $u_\ell > 0$ e

$$\frac{(\ell\text{-ésima linha})}{u_\ell} \overset{L}{<} \frac{(i\text{-ésima linha})}{u_i}, \tag{1}$$

para $i \neq \ell$ e $u_i > 0$.

Para atualizar o tableau, a ℓ-ésima linha é dividida pelo elemento pivô positivo u_ℓ e, portanto, permanece lexicograficamente positiva.

Prova do Teorema 1

Considere a i-ésima linha e suponha que $u_i < 0$. Para zerar o elemento (i, j) do tableau, precisamos somar um múltiplo positivo da linha pivô à linha i. Pelo fato de ambas as linhas serem lexicograficamente positivas, a i-ésima linha permanecerá lexicograficamente positiva depois desta soma.

Finalmente, considere a i-ésima linha e suponha que $u_i > 0$ e $i \neq \ell$. Temos que

$$(\text{nova linha } i) = (\text{antiga linha } i) - \frac{u_i}{u_\ell}(\text{antiga linha } \ell).$$

Por causa da desigualdade lexicográfica (1), que é satisfeita pelas linhas antigas, a nova linha i também é lexicograficamente positiva.

Prova do Teorema 1

Agora, vamos mostrar (b), ou seja, a linha 0 aumenta lexicograficamente estritamente a cada iteração.

Note que, no início de uma iteração, o custo reduzido da coluna pivô é negativo. Para transformá-lo em 0, precisamos somar um múltiplo positivo da linha pivô.

Como a linha pivô é lexicograficamente positiva, a linha 0 cresce lexicograficamente estritamente.

Prova do Teorema 1

Finalmente, vamos mostrar (c), ou seja, o Método Simplex termina depois de um número finito de iterações.

Como a linha 0 cresce lexicograficamente a cada iteração, ela nunca volta a um valor anterior. Como a linha 0 é completamente determinada pela base atual, nenhuma base pode se repetir. Portanto, o Método Simplex deve terminar depois de um número finito de iterações. $\square$

Regra lexicográfica de pivotamento

A regra lexicográfica de pivotamento pode ser usada diretamente quando o tableau completo é usado.

Quando o Método Simplex revisado é usado e a matriz B^{-1} é calculada explicitamente, esta regra também pode ser usada. No entanto, em implementações sofisticadas do Método Simplex revisado, a matriz B^{-1} não é calculada explicitamente e esta regra não é adequada.

Regra lexicográfica de pivotamento

Note que, para aplicar a regra lexicográfica de pivotamento, precisamos que o tableau inicial seja lexicograficamente positivo.

Se temos um tableau inicial, podemos renomear as variáveis de forma que as variáveis básicas sejam as m primeiras. Isso é equivalente a reordenar o tableau de modo que as primeiras m colunas de $B^{-1}A$ formem uma matriz identidade.

Este novo tableau tem linhas lexicograficamente positivas, como desejado.

Regra de Bland

A regra de pivotamento do menor índice, conhecida como regra de Bland, é a seguinte.

P1. Encontre o menor j para o qual o custo reduzido $\bar{c}_j$ é negativo e faça a coluna A_j entrar na base.

P2. De todas as variáveis x_i empatadas no teste para escolher a variável que sai da base, escolha a que tem o menor valor de i.

Regra de Bland

Esta regra é compatível com a implementação do Simplex revisado em que os custos reduzidos das variáveis não-básicas são calculados um a um, na ordem, até que um valor negativo seja encontrado.

Usando esta regra de pivotamento, sabe-se que não ocorre ciclagem e que o Método Simplex tem garantia de terminar em um número finito de iterações.